

Matemática financeira

Abordagem prática para pequenos negócios
e empreendimentos da economia solidária.



MATEMÁTICA FINANCEIRA.

Abordagem prática para pequenos negócios e empreendimentos da economia solidária.

UFRB
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
REITOR

Paulo Gabriel Soledade Nacif

VICE-REITOR
Silvio Luiz Oliveira Soglia



Editora UFRB

SUPERINTENDENTE
Sérgio Augusto Soares Mattos

CONSELHO EDITORIAL
Alessandra Cristina Silva Valentim
Carlos Alfredo Lopes de Carvalho
Fábio Santos de Oliveira
Ósia Alexandrina Vasconcelos Duran Passos
Rosineide Pereira Mubarack Garcia
Sérgio Augusto Soares Mattos (presidente)

SUPLENTE
Ana Cristina Vello Loyola Dantas
Geovana Paz Monteiro
Jeane Saskya Campos Tavares

EDITORA FILIADA À



Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

José da Conceição Santana

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Abordagem prática para pequenos negócios e
empreendimentos da economia solidária



Editora UFRB

Cruz das Almas – Bahia

2012

Copyright©2012 by, José da Conceição Santana.
Direitos para esta edição cedidos à EDUFRB

*Projeto gráfico, capa
e editoração eletrônica:*
Tag Comunicação

Revisão, normalização técnica:
Tag Comunicação

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme
decreto nº 1.825, de 20 de dezembro de 1907.

A reprodução não-autorizada desta publicação, por qualquer meio,
seja total ou parcial, constitui violação da Lei nº 9.610/98.

S231m Santana, José da Conceição.

Matemática financeira : abordagem prática para pequenos negócios
e empreendimentos da economia solidária / José da Conceição
Santana. -- Cruz das Almas/BA : UFRB, 2012.
88p.

ISBN: 978-85-61346-30-0

1. Matemática financeira. I. Título.

CDD 513.93



Campus Universitário
Rua Rui Barbosa, nº 710, Centro
44380-000 Cruz das Almas – BA
Tel.: (75)3621-1293
gabi.editora@ufrb.edu.br

Sumário

PREFÁCIO.....	7
BREVE REVISÃO DE MATEMÁTICA ELEMENTAR.....	9
1.1 - PERCENTAGEM	9
1.2 - RAZÃO E PROPORÇÃO.....	10
1.3 - REGRA DE TRÊS	11
1.4 - POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO.....	12
1.5 - EQUAÇÃO DO 1º GRAU	13
1.6 - PLANO CARTESIANO	14
1.7 - EXERCÍCIOS GERAIS	16
FUNÇÕES.....	19
2.1 - CONCEITOS	19
2.2 - FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU	23
2.3 - APLICAÇÕES DE FUNÇÕES DO 1º GRAU	27
2.3.1- FUNÇÃO DEMANDA:.....	27
2.3.2 - FUNÇÃO OFERTA:	28
2.3.3 - FUNÇÃO CUSTO:	30
2.3.4 - FUNÇÃO RECEITA:.....	32
2.3.5 - FUNÇÃO LUCRO:.....	33
2.3.6 - FUNÇÃO DEPRECIACÃO:.....	34
24 - EXERCÍCIOS GERAIS SOBRE APLICAÇÃO DE FUNÇÕES LINEARES... 34	
2.5 - ESTUDO DE CASOS: APLICAÇÃO DE FUNÇÕES LINEARES.. 37	

O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO.....	43
3.1 - CONCEITOS BÁSICOS EM MATEMÁTICA FINANCEIRA	43
3.2 - SISTEMAS OU REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO	46
3.2.1- CAPITALIZAÇÃO SIMPLES	46
3.2.2 - EXERCÍCIOS GERAIS SOBRE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES	48
3.2.3 - CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA	50
3.2.4 - EXERCÍCIOS GERAIS SOBRE JUROS COMPOSTOS.....	55
OPERAÇÕES DE DESCONTOS	59
4.1 - CONCEITOS.....	59
4.2 - TIPOS DE DESCONTOS: RACIONAL, COMERCIAL E BANCÁRIO	60
4.3 - TAXA IMPLÍCITA	61
4.4 - EXERCÍCIOS GERAIS SOBRE OPERAÇÕES DE DESCONTOS.....	62
SÉRIES OU ANUIDADES.....	65
5.1 - CONCEITOS.....	65
5.2 - MODELO BÁSICO.....	67
5.3 - VARIAÇÕES DE ANUIDADES A PARTIR DO MODELO BÁSICO...	67
5.4 - EXERCÍCIOS GERAIS SOBRE ANUIDADES:.....	69
AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS... 	73
6.1 - CONCEITOS.....	73
6.2 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE – SAC	74
6.3 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS.....	76
6.4 - SISTEMA AMERICANO.....	78
6.5 - COMPARATIVO DE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO.....	79
6.6 - EXERCÍCIOS GERAIS SOBRE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO: ..	80
BIBLIOGRAFIA	85

Prefácio

Ao elaborar o presente material didático, tive como objetivo principal oferecer ao estudante de graduação da área de gestão ou mesmo ao leigo interessado no assunto, um texto que condensasse a aplicação de cálculos matemáticos simples - no caso a função do 1º grau - e a matemática financeira básica. Temas esses muito úteis ao gestor, principalmente do micro e pequeno negócio, para seu planejamento e decisões do dia a dia. Tendo em vista que os sistemas de cooperativas, associações e outros empreendimentos da economia solidária se enquadram na categoria de micro e pequenos negócios, muitas vezes informais - excetuando-se alguns casos de cooperativas bem estruturadas - busquei incluir exercícios próximos da realidade que esses empreendimentos experimentam, a fim de tornar o presente material uma ferramenta de contribuição à profissionalização dessas organizações.

O texto, embora não fuja ao rigor matemático, tenta transmitir os temas em uma linguagem mais próxima do coloquial e suprimindo as deduções mais complexas de fórmulas. Essa orientação decorre da minha experiência de sala de aula ao longo de dez anos de ensino na área, resultante do esforço constante em tentar me colocar no lugar do estudante e assim poder captar a dúvida o mais próximo possível do seu olhar. Através desse entendimento, a explanação do tema e respostas às dúvidas se tornam mais claras e mais eficazes do ponto de vista da absorção por aquele que busca aprender. A experiência com estudantes do turno noturno - em geral trabalhadores durante o dia - bem como lecionar para um curso com características especiais - Tecnologia em Gestão de Cooperativas - contribuiu sobremaneira para estabelecer a linguagem que aqui se apresenta.

Não há a pretensão de cobrir exhaustivamente ou esgotar o tema

abordado, mas espero que o texto oferecido tenha conteúdo bastante para iniciar aqueles que necessitam ou dependem da matemática como ferramenta para desenvolver melhor seu trabalho.

Aos leitores - quer para estudo ou análise da obra - agradeço de antemão o envio de críticas ou sugestões, as quais servirão para aprimoramentos futuros.

O autor

Breve revisão de matemática elementar

Antes de adentrarmos nos cálculos matemáticos, cabe uma rápida revisão para reavivar a memória acerca de operações que formam a base dos cálculos objeto desse livro. Para essa revisão foram selecionados tópicos que formam um conjunto de saberes indispensáveis para a compreensão e o bom desenvolvimento do conteúdo proposto pelo livro. Mesmo para aqueles que já têm um bom domínio sobre percentagem, razão e proporção, regra de três, potenciação, radiciação e equação, convém efetuar a revisão, consolidando assim o conhecimento já adquirido.

1.1 - Percentagem

Um percentual “x por cento” representa X dividido por cem, correspondendo sempre a frações cujo denominador é o número 100. Isso torna o cálculo mais fácil quando queremos representar uma parte de uma quantidade em relação ao seu todo ou mesmo fazer comparações numéricas. Por exemplo, se no semestre passado, houve 34 aprovações dentre os 45 alunos de uma determinada disciplina e ao final do presente semestre obtiveram aprovação 39 estudantes de um total de 51 matriculados na mesma disciplina, não temos facilmente a ideia da

evolução do aproveitamento. Entretanto, se trabalharmos com a ideia de porcentagem, tem-se que no semestre passado 75,6 por cento dos alunos foram aprovados, enquanto que no presente semestre, a aprovação foi de 76,5 por cento. Imediatamente se percebe o ligeiro aumento no aproveitamento dos estudantes e essa facilidade de perceber uma determinada situação, fez com que o uso da porcentagem se popularizasse e se difundisse tão expressivamente.

Mas, a Matemática prima pela linguagem o mais simbólica possível e nesse sentido, escrever o número sempre seguido das palavras “por cento”, passa por uma outra simplificação: escreve-se o número e em seguida acrescenta-se o símbolo %, o qual significa que o valor está dividido por cem. Assim a notação de valores em porcentagem, nos valores das aprovações anteriormente exemplificadas, seria escrita como 75,6% e 76,5% respectivamente. Ocorre que ao se apresentar nessa forma, o número não pode ser utilizado para uma operação algébrica diretamente, quando se deseja chegar a uma solução de um problema proposto. Nesse caso, é necessário que se transforme esse número em sua forma denominada unitária. Então, caso desejássemos utilizar os números do exemplo anterior para executar operações, teríamos que transformá-los em sua forma denominada de unitária, ou seja: 0,756 e 0,765 ou na forma de frações $(\frac{75,6}{100}$ e $\frac{76,5}{100})$.

1.2 - Razão e proporção

A razão expressa a relação ou quociente que existe entre dois valores de mesma grandeza. Ou ainda em outras palavras, significa a divisão do primeiro valor pelo segundo. Essa relação é comumente escrita na forma de uma fração e nessa representação, diz-se que o numerador é o termo antecedente e o denominador é o termo conseqüente.

Quando essas duas frações se igualam (igualdade de duas razões), tem-se uma proporção. Dessa igualdade resulta o axioma: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, bastante utilizado na resolução de situações problemas, como se verá a seguir.

1.3 - Regra de três

A ideia da proporção e o axioma anteriormente citado têm grande utilidade na resolução de situações-problemas, nas quais se desconhece uma das partes das frações que compõem a proporção. Seja por exemplo a situação: com R\$ 40,00 se consegue 4 ingressos para uma determinada sessão de cinema. Caso se pretendesse 6 ingressos, qual a quantidade que deveria se dispor? Transformando ambas as relações em frações e igualando-as, tendo em vista o seu relacionamento intrínseco, tem-se que $\frac{4}{40} = \frac{6}{X}$ (quatro ingressos estão para R\$ 40,00, assim como seis ingressos estão para X reais). Utilizando o postulado do axioma, tem-se: $4 \cdot X = 240$. Logo, $X = 60$. Ou seja, 6 ingressos custarão R\$ 60,00.

Esse processo é denominado de “Regra de Três” e permite a comparação de duas razões ou grandezas, de forma a constituir uma proporção direta ou inversa. A regra de três direta é assim denominada porque a variação de uma das grandezas para mais ou para menos, implicará na variação da grandeza correlata na mesma forma. Já na regra de três indireta - como a denominação intuitiva - o aumento de uma grandeza implica na redução da outra ou vice-versa.

Exemplo de regra de três direta:

Se dois pares de tênis custam 100,00, quanto custarão três pares idênticos?

Resolução

2 pares estão para 100,00

3 pares estão para X.

Como o custo aumentará diretamente com a quantidade, tem-se a seguinte proporção: $\frac{2}{100} = \frac{3}{X}$. Resolvendo-se pelo axioma da proporção, $X = (3 \times 100) \div 2$. Então $X = 150,00$. Confirmando a variação para mais no valor a pagar, resultante do aumento da grandeza pares de tênis.

Exemplo de regra de três inversa

Três pedreiros constroem um muro em duas horas. Quantas horas serão necessárias para que seis pedreiros construam a mesma parede?

Resolução:

3 pedreiros para 2 horas

6 pedreiros para Y horas

Percebe-se a necessidade de inversão das razões, pois o número maior de homens diminuirá o tempo de execução. Então, invertendo as razões, tem-se:

3 : Y

6 : 2.

Cuja resolução algébrica leva ao valor de $Y = (3 \times 2) \div 6 = 1$ hora.

1.4 - Potenciação e radiciação

Potenciação é definida como a multiplicação de um número $a \in \mathbf{R}$, por ele mesmo, tantas vezes quanto esteja indicado em seu expoente $n \in \mathbf{R}$. Assim, $5^3 = 5 \times 5 \times 5$. Onde 5 é o número a – base – e 3 é o número n – expoente.

Propriedades básicas da potenciação:

1) $a^1 = a$, ou seja: todo número elevado à unidade, é igual a ele mesmo.

2) $a^0 = 1$, ou seja: todo número elevado a zero, é igual à unidade.

3) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ou seja: um número elevado a um expoente negativo, é igual ao seu inverso, com o expoente positivo.

4) $a^n \times a^m = a^{n+m}$, ou seja: na multiplicação de potências de mesma base, mantém-se a base e somam-se os expoentes.

5) $a^n \div a^m = a^{n-m}$, ou seja: na divisão de potências de mesma base, mantém-se a base e subtrai-se os expoentes.

Radiciação: é a operação inversa da potenciação, a seguir representada.

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ onde: a é o radicando; n é o índice, e m o expoente.

1.5 - Equação do 1º grau

Segundo o autor Bruni¹ as equações são representações de igualdade, em que se deseja obter um valor desconhecido. E, de acordo essa definição, pode-se representar a situação a seguir por uma equação matemática, a fim de se obter um valor desejado.

Situação-problema: Durante o mês de outubro, João Paulo observou que um par de chuteiras para futebol custava R\$ 350,00 e pensou em presentear seu filho que era apaixonado pelo esporte. Mas, deixou passar o tempo e somente em dezembro resolveu efetivar a compra. Notou então que o preço havia sido majorado para R\$ 400,00. Qual o valor do aumento aplicado?

Então, transformando-se a situação em uma equação matemática, tem-se que:

$350 + X = 400$. Onde, $X = 400 - 350 = 50$. Em uma situação simples como essa não é necessário se recorrer formalmente à construção de uma equação, para se obter o resultado. Intuitivamente o cálculo é efetuado mentalmente. Mas, a estrutura da equação foi montada, mesmo que não se tenha percebido. O exemplo simples serve para a compreensão da aplicação do conceito de equação e, a partir dessa compreensão, resolver situações complexas.

Conhecendo melhor como funciona uma equação:

a) O termo situado à esquerda do sinal de igualdade é chamado de primeiro membro. O termo que está à direita é denominado de segundo membro;

b) Para se conhecer o valor da variável (normalmente denominada X), procura-se isolar a mesma em um membro da equação. Faz-se isso transportando o número que está junto à variável para o membro

1 Bruni, Adriano. Matemática Financeira. São Paulo:Atlas, 2003.

oposto. Nesse transporte, o número passa a ser representado com a operação inversa da qual estava inicialmente na sua posição original. Por essa razão é que no exemplo das chuteiras, o número 350 passou a ser subtraído de 400 (atentar para o fato de que na sua posição original, o número 350 estava sendo somado a X).

c) Caso se tenha vários números com diversas operações junto à variável X, passa-se um a um para o lado contrário, priorizando aqueles números independentes e por último o número - se houver - que esteja numa operação direta com a variável X. É importante lembrar que a cada número transportado, a operação seja invertida. Assim, se o número está somando, passa a subtrair. Se estiver multiplicando, passa a dividir.

d) Ambos os termos podem ser acrescidos ou subtraídos de uma constante sem alterar a igualdade;

e) Da mesma forma, ambos os termos podem ser multiplicados ou divididos por uma constante sem alterar a igualdade (na divisão a constante deverá ser diferente de zero).

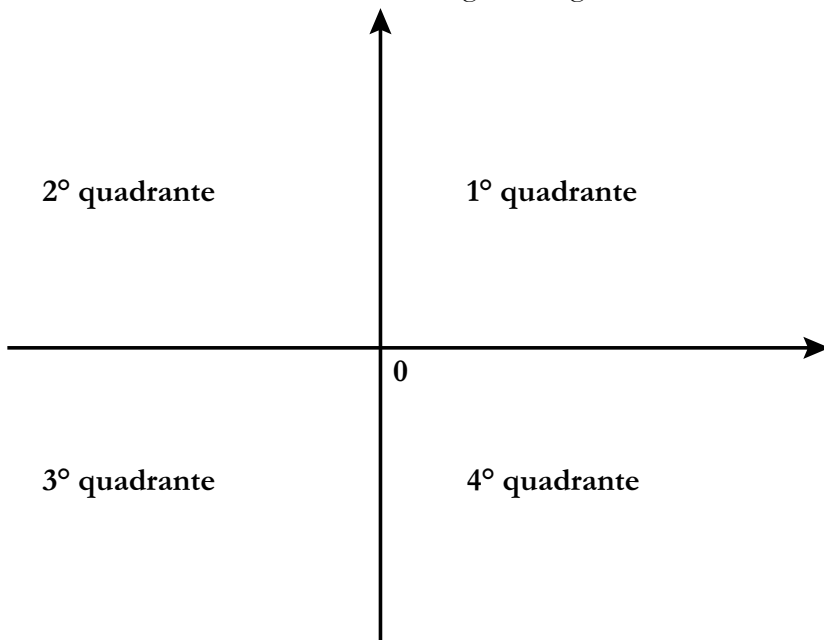
A equação anterior, por ter sua variável elevada à unidade, é denominada de equação do 1º grau. Se o número X (ou outra letra que represente a variável na equação) for elevado a 2 ou 3, a equação será denominada de 2º ou 3º graus respectivamente. A depender do número a que estiver elevada a variável, virá a denominação do grau da equação. Para o nível de aprofundamento que se propõe o presente estudo, o domínio da equação do 1º grau já é suficiente. Por essa razão, não se expõe aqui outros graus de equação.

1.6 - Plano cartesiano

Quer seja no dia a dia dos negócios ou prevendo situações futuras, necessitamos de certos conhecimentos que servirão de ferramentas para traçarmos um caminho mais seguro nas nossas decisões. Já vimos até aqui vários desses instrumentos que a Matemática nos oferece. Mas,

além das resoluções numéricas, às vezes necessitamos de representarmos graficamente a ideia ou mesmo a situação que está ocorrendo. Transportar o número para o desenho - que no capítulo 2 aparecerão sob a forma de gráficos - é ao mesmo tempo um desafio e um instrumental valiosíssimo, tal a facilidade de sua compreensão. Necessário se torna aprender a base do sistema gráfico e por isso vamos voltar a nossa atenção para o chamado plano cartesiano.

René Descartes desenvolveu um sistema para localizar pontos num espaço plano, denominado de plano cartesiano. Esse sistema é formado por dois eixos perpendiculares, onde o eixo horizontal é chamado de eixo das abscissas (x), o vertical de eixo das ordenadas (y) e o ponto de cruzamento dos eixos é denominado origem. Assim constituído o sistema, divide o espaço plano em quatro partes, denominadas de quadrantes e distribuídos conforme a figura a seguir.



Cada ponto do plano cartesiano é constituído de dois valores, denominado de par ordenado (x, y) , onde o valor x é marcado tendo como referência o eixo das abscissas e o valor y se refere ao eixo das ordenadas. É convencionado que os valores à direita da origem no eixo das abscissas são números positivos e à esquerda negativos. Análogamente, o eixo das ordenadas se divide em valores positivos a partir da origem para cima e negativos da origem para baixo. Para se marcar um ponto qualquer $A(x, y)$ no plano cartesiano, segue-se o roteiro: Primeiro: localiza-se o valor numérico do x no eixo das abscissas; Segundo: localiza-se o valor numérico do y no eixo das ordenadas; Terceiro: Traça-se uma reta (normalmente pontilhada) perpendicular aos eixos, partindo de cada valor numérico respectivo e no encontro delas será o local do ponto desejado.²

1.7 - Exercícios gerais

1) Representar em percentual os seguintes números:

- a) Dez por cento; b) Quatro por cento; c) cento e quinze por cento; d) três e meio por cento.

2) Representar em sua forma unitária os valores a seguir:

- a) 13%; b) 130%; c) 42,5%; d) 0,45%

3) Calcular o valor dos percentuais, a seguir indicados:

- a) 25% de 150; b) 10% de 2,5; c) 100% de 1.000; d) 5,5% de 40.

4) Utilize o axioma da proporção, para calcular os valores das incógnitas nas igualdades a seguir:

- a) $\frac{2}{3} = \frac{X}{6}$; b) $\frac{X}{5} = \frac{10}{25}$; c) $\frac{4}{8} = \frac{12}{X}$;

5) A associação de costureiras produzia mensalmente 100 peças de

² <http://www.brasile scola.com/matematica/plano-cartesiano.htm>. Por Marcos Noé. Acessado em 04 de março de 2011.

Respostas

- 1) a) 10%; b) 4%; c) 115%; d) 3,5%.
- 2) a) 0,13; b) 1,30; c) 0,425; d) 0,0045.
- 3) a) 37,5; b) 0,25; c) 1000; d) 2,2.
- 4) a) $x = 4$; b) $x = 2$; c) $x = 24$.
- 5) $X = 160$.
- 6) $X = 1$ hora e 20 min.
- 7) $X = 3.750$ kg.
- 8) $X = 10$ horas e 40 min.
- 9) a) 64; b) 81; c) 243; d) 9.
- 10) a) $x = 10$; b) $x = 20$; c) $x = 20$; d) $x = -16,80$.
- 11) TV = R\$ 610,00; Computador = R\$ 1 220,00.

2.1 - Conceitos

A observação de fenômenos naturais e a necessidade de se estabelecer relações entre certas causas e efeitos, levou os estudiosos a construir modelos matemáticos que refletissem as observações, com o intuito de previsões, planejamento e outras necessidades humanas. O modelo matemático que procura retratar esses fenômenos é denominado de funções.

O entendimento do modelo de funções possibilitará a interpretação de observações de uma forma sistematizada e que permita estudar soluções para situações consideradas indesejáveis ou insatisfatórias.

Na linguagem matemática, as funções são assim definidas:

Uma relação f de A em B é uma função se e somente se:

a) Todo elemento x pertencente a A tem um correspondente y pertencente a B definido pela relação, chamado imagem de x .

b) A cada x pertencente a A não podem corresponder dois ou mais elementos de B por meio de f

Ou em outras palavras, segundo Goldstein³, a *função* de uma variável x é uma regra que associa a cada valor de x um único número $f(x)$, chamado de *valor da função em x* . Onde X é a variável independente e chamado domínio da função e, $F(x)$ ou Y é a imagem da função ou valores que a função pode assumir.

As funções comumente podem ser representadas por fórmulas algébricas, diagramas, gráficos ou tabelas. A representação escolhida será aquela mais adequada à situação que se quer demonstrar. Veja-se então, cada uma dessas representações e a partir de sua compreensão, quando diante de uma situação-problema, tem-se a possibilidade de se lançar mão do instrumental mais apropriado para a resolução.

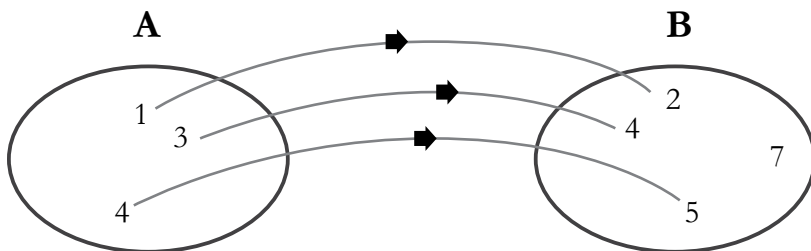
- Representação por fórmulas algébricas

Seja a situação: uma cooperativa tem um custo mensal fixo com aluguéis, manutenção, vigilância e outros no valor de R\$ 2.000,00 e para cada produto que é produzido tem um custo variável por cada unidade de R\$ 45,00. É de fundamental importância que a cooperativa saiba quanto terá de custo total, ao final da produção mensal. Essa realidade pode ser representada numericamente para fins de facilitar os cálculos e aí entra a construção de uma fórmula que retrate a situação. A fórmula $f(x) = 2000 + 45 X$ (onde x é a variável independente e $f(x)$ os valores que a função pode assumir), atende perfeitamente ao que é exigido.

- Representação por diagrama

A representação busca facilitar o entendimento da questão posta. Assim, quando se tem os conjuntos domínio e imagem, com uma função explicitando a relação, o diagrama é um instrumento que facilita a compreensão da resolução. Por exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$ (domínio da função) e $B = \{2, 4, 5, 7\}$ (imagem da função) e a forma algébrica da função que a cada $x \in A$ associa-se um $y \in B$ de modo que $y = x + 1$. A representação da solução por diagrama torna mais compreensível a resolução. Tem-se o diagrama:

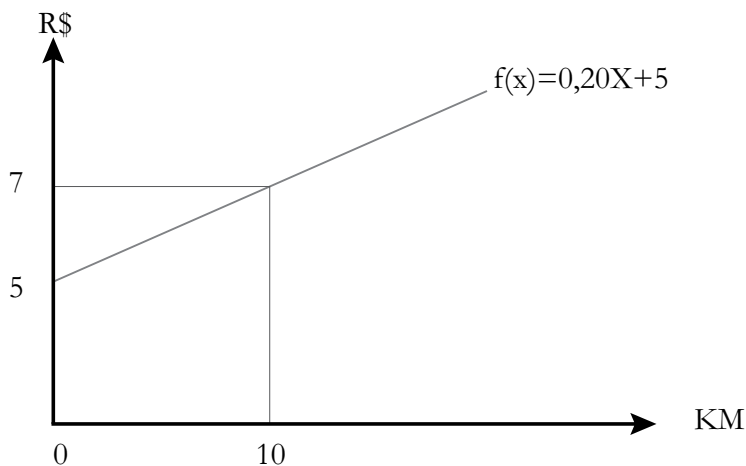
³ Larry Goldstein J. Matemática aplicada: economia, administração e contabilidade. Porto Alegre: Bookman, 2000, p.16.



- Representação por gráficos

Às vezes é necessário se mostrar um comportamento contínuo da função que está a exprimir uma determinada situação. O gráfico é então a forma de representação da função mais indicada para essa ocasião. Por outro lado, há a facilidade de transformação de dados de uma planilha em gráficos, diretamente pelo software que se está utilizando (as planilhas Excel são exemplo disso). A representação gráfica transmite de imediato e de fácil assimilação, o comportamento da função e sua tendência. É um excelente instrumento para auxiliar o gestor na tomada de decisões. Veja-se a ilustração a seguir.

Seja a função $f(x) = 0,20X + 5$, em que o domínio (D) é o conjunto dos números reais (R). Essa função representa o custo da utilização de um táxi que cobra R\$ 0,20 por km rodado, mais R\$ 5,00 a título de bandeirada na partida do veículo. A representação gráfica permite saber a qualquer distância rodada, qual o custo da corrida, por meio de uma simples leitura do gráfico.



- Representação por tabela

É uma forma de representação da função onde são mostrados vários dados diretamente, suprimindo a necessidade de se efetuar cálculos. Pegue-se como exemplo o trabalho de uma pequena copiadora reprográfica, destinada a atender estudantes. Para cada cópia reprográfica simples produzida, o estudante deverá pagar R\$ 0,08. A forma algébrica dessa função seria: $f(x) = 0,08X$, a qual pode ser representada em forma de tabela, para fornecer o custo total diretamente proporcional às cópias realizadas, sem a necessidade do operador ficar a todo instante efetuando cálculos.

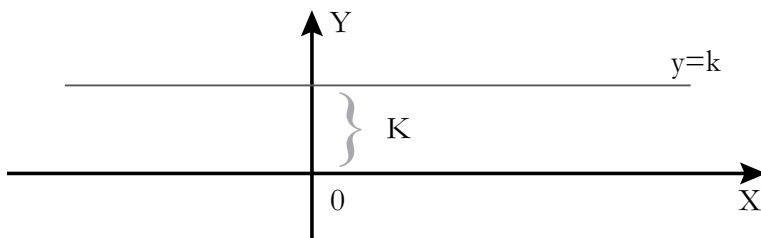
Número de cópias	Custo total (R\$)
1	0,08
2	0,16
3	0,24
4	0,32
...	
35	2,80
...	
50	4,00

2.2 - Funções polinomiais do 1º grau

Essas funções têm como sua representação a reta (equação e gráfico). Essa representação não consegue abarcar a complexidade dos fenômenos, mas é um modelo que serve de uma aproximação bastante razoável para a realidade dos pequenos empreendimentos, principalmente aqueles denominados micro-negócios, bem como os informais. Nesses tipos de empreendimentos, há uma carência de sistemas informatizados e corpo técnico que possibilite a implantação de modelos sofisticados e por outro lado, no seu dia a dia não enfrenta situações de complexidade tal que o modelo linear ou do primeiro grau não possa atender a contento. Assim, a seguir serão desenvolvidos os modelos de funções lineares ou do primeiro grau que posteriormente serão vistos com aplicações para acompanhar ou planejar receitas, demandas, ofertas, lucro e outras tão necessárias à administração desses negócios.

- Função Constante

É toda função do tipo $y = k$, em que k é uma constante real. Verifica-se que o gráfico dessa função é uma reta horizontal, passando pelo ponto de ordenada k .



- Função Afim ou Linear

Uma função é chamada de função do 1º grau (ou função afim)⁴⁴ se sua sentença for dada por $y = m x + n$. O número n significa o coeficiente linear ou o valor da ordenada onde a reta da função corta o eixo Y. O número m representa o coeficiente angular da reta da função com

⁴⁴ Obs: Quando o coeficiente n for igual a zero, a função se reduz à forma $y = mx$ e se denomina de função linear.

o eixo X e é calculado algebricamente pela fórmula: $m = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$

Quando $m > 0$, a função é chamada crescente, isto é: ao crescimento dos valores da abscissa, há também o crescimento dos valores do eixo das ordenadas.

Quando $m < 0$, a função é chamada decrescente, isto é: ao crescimento dos valores da abscissa, há o decréscimo dos valores do eixo das ordenadas.

Essa função tem bastante aplicação no cotidiano das organizações, notadamente aquelas de pequeno porte, universo de que fazem parte os empreendimentos da economia solidária- EES. Apesar da simplificação matemática que o modelo traz, pode-se determinar a projeção de demanda, oferta, custo, receita, lucro e depreciação dos EES, haja vista a facilidade de construção dessa função e a aproximação satisfatória do modelo com a realidade do dia-a-dia de cooperativas, associações e outros EES, permitindo um planejamento eficaz.

A projeção é feita a partir de um levantamento de dados experimentais. Por exemplo, seja o comportamento das vendas de inhame de uma cooperativa agrícola para a região metropolitana mais próxima, dada pelas tabelas a seguir.

Mês	Quant (kg)	Venda total (R\$)
Fev	1.200	2.400,00
Mar	1.500	3.000,00

A partir desses dados, pretende-se fazer uma projeção do faturamento da cooperativa em função da sua produção. Como primeiro passo, busca se construir a função - na forma analítica - que exprime essa relação. Deve-se então, a partir dos dados obtidos, determinar os valores numéricos de m e n , para posteriormente se montar a função $y = mx + n$.

Tem-se então os pontos: A(1000, 2400) e B(1500, 3000). Obs - tomando-se a venda como eixo Y e a quantidade como eixo X.

Cálculo do coeficiente angular - m :

$$m = \frac{3000 - 2400}{1500 - 1000} = 1,2$$

Cálculo do coeficiente linear - n : substitui-se um dos pontos (A ou B) e o valor de m na equação $y = mx + n$. Escolhendo-se o ponto A, por exemplo, vem:

$2400 = 1,2 \cdot 1000 + n$. Resolvendo a equação do 1º grau, tem-se que $n = 2400 - 1200 = 1200$.

A equação que representa a projeção será: $y = 1,2X + 1200$. Assim, para qualquer quantidade a ser produzida, rapidamente se tem o valor da receita projetada.

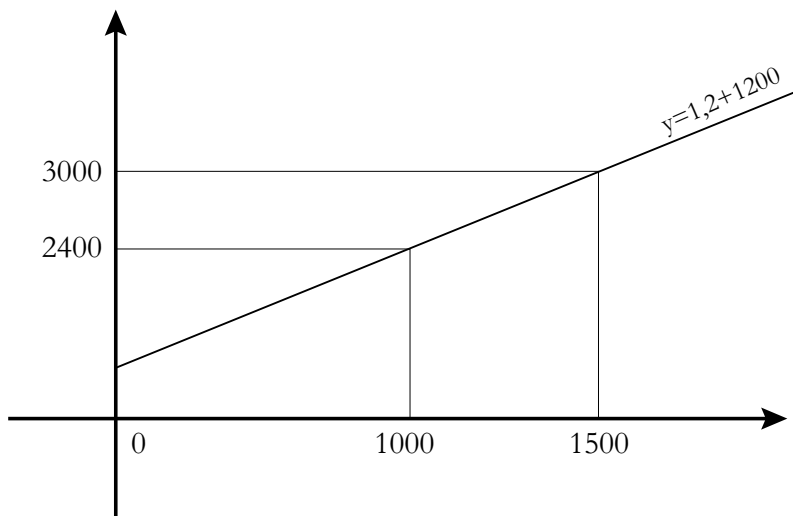
Para se visualizar essa projeção, uma forma bastante utilizada é construir o gráfico referente à função. É um gráfico bastante simples, com base nos princípios do plano cartesiano. Tendo em vista que a função é linear, ou seja: representada graficamente por uma reta, o processo de construção do gráfico é bastante facilitado. Veja-se:

Primeiro: traçam-se os dois eixos perpendiculares – X e Y, construindo-se o plano cartesiano;

Segundo: sobre esse plano, marcam-se os pontos A e B;

Por fim: passa-se por esses dois pontos uma linha, obtendo-se então a reta que representa a função. Dessa forma, ao prolongar a reta para além dos pontos, pode-se fazer a leitura da receita a partir de qualquer valor da produção projetada, pois partindo-se de um valor da abscissa (x), através de uma perpendicular, ao se interceptar a reta da função, chega-se ao valor da receita através de uma outra perpendicular ao eixo das ordenadas (y).

Gráfico da função $y = 1,2X + 1200$:



Construção do gráfico a partir da equação: em se tratando de função linear, quando se dispõe da equação, o gráfico é construído seguindo os passos:

- 1) Traça-se o par de eixos cartesianos, conforme explanado no item 1.6;
- 2) Atribui-se um valor qualquer para X e calcula-se o Y correspondente, substituindo o X na equação dada. A esse par (x, y) se denomina de ponto A;
- 3) Atribui-se novo valor para X, calculando-se novo Y e assim se chega ao ponto B;
- 4) Conforme explicitado no item 1.6, marca-se esses dois pontos (A e B) no plano cartesiano;
- 5) Traça-se uma reta ligando os dois pontos (A e B), prolongando-se a reta para além dos pontos. Tem-se então a função representada graficamente.

2.3 - APLICAÇÕES DE FUNÇÕES DO 1º GRAU

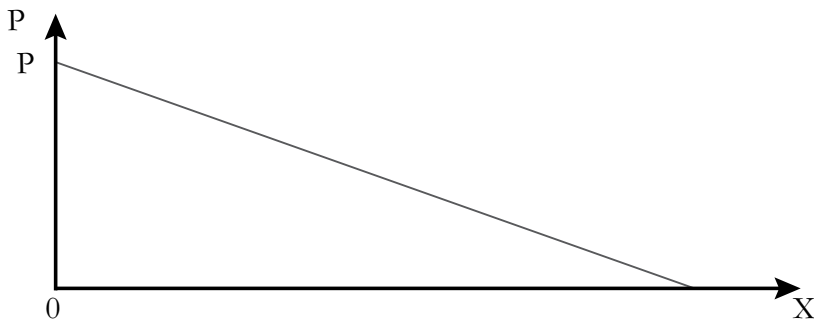
Todo empreendimento – independente do seu tamanho e complexidade – necessita de estar embasado em um planejamento que leve em consideração os fenômenos econômicos do meio que o cerca. As funções matemáticas são instrumentos através dos quais esses fenômenos podem ser descritos⁵⁵ e quanto maior o número de fatores, mais complexo o modelo matemático de função para contemplar a situação. Entretanto, os pequenos empreendimentos – onde se localizam os empreendimentos da economia solidária-EES - podem considerar vários desses fenômenos como constantes, restringindo as variáveis, o que possibilita a utilização das funções lineares para esse planejamento, com uma aproximação satisfatória. A seguir, modelos econômicos representados pela função do 1º grau, com aplicações no cotidiano dos pequenos empreendimentos.

2.3.1- Função Demanda:

Pode ser definida como a procura por um determinado bem, em um prazo determinado. Essa procura tem vários componentes, tais como o preço, gosto, renda dos consumidores, dentre outros. Considerando-se somente o preço como variável, é possível se projetar a demanda de determinado produto, através da função $p = -mx + n$. É uma função que busca avaliar o comportamento do consumidor através da variável preço: menor preço implica na maior demanda. Como se vê pelo sinal do coeficiente angular, é uma função decrescente. O aumento da demanda (eixo das abscissas) é correspondente a um valor menor do preço (eixo das ordenadas). Seu gráfico típico é:

5

Veras, Lília Ladeira. Matemática aplicada à economia. Capítulo 1. 3. Ed. São Paulo: Atlas, 1999.



Note-se que p_0 é o maior preço que o consumidor estará disposto a pagar por um bem colocado no mercado. À tendência de diminuição do preço, a demanda cresce e em termos de modelo matemático, quando seu preço for zero, essa demanda atingirá o ponto máximo.

Exemplo de aplicação:

Uma pequena sorveteria comunitária conseguiu estabelecer o número de sorvetes (x) demandados por semana, relacionado com o preço unitário (p) de acordo com a função

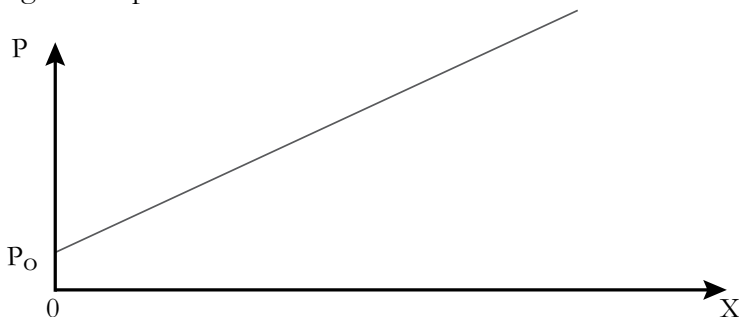
$$p = 8 - 0,01 x. \text{ Calcular a demanda para } p = \text{R\$ } 2,00.$$

Solução: substituindo o valor 2,00 por p , tem-se $2 = 8 - 0,01 X$. Resolvendo-se a equação, $X = 600$. Assim, quando o preço do sorvete for de R\$ 2,00, haverá uma demanda de 600 unidades por semana. A partir desse simples exemplo, vê-se que a é possível se traçar uma programação com base na variação de um componente que afeta a demanda, no caso o preço. De posse dessa projeção, pode-se preparar a necessidade de materiais e pessoas para o atendimento da demanda.

2.3.2 - Função Oferta:

Pode ser definida como a quantidade de um determinado bem, lançado no mercado em um prazo determinado. Assim como a demanda, a oferta possui vários componentes que sofrem variações, mas considerando-se somente o preço como variável, é possível se projetar a

oferta de determinado produto, através da função $p = mx + n$. É uma função que busca avaliar o comportamento do produtor através da variável preço: maior preço implica em mais fabricantes interessados em colocar seu produto no mercado. Como se vê pelo sinal do coeficiente angular, é uma função crescente. O aumento da oferta (eixo das abscissas) é correspondente a um valor maior do preço (eixo das ordenadas). Seu gráfico típico é:



Note-se que P_0 é o menor preço que o produtor estará disposto a colocar o bem no mercado. À tendência de aumento do preço, a oferta cresce e em termos de modelo matemático, quando seu preço tender ao infinito, também será a tendência de fabricantes a lançarem o produto no mercado.

Exemplo de aplicação:

Aproveitando o exemplo da sorveteria comunitária, pela experiência do mês anterior, notou-se que ao vender a unidade por um preço de R\$ 1,80, a sorveteria oferta 400 unidades por semana. Quando o preço atinge R\$ 2,20, a oferta passa a ser de 800 unidades no mesmo período. Estabelecer a função de oferta.

Solução:

Os pontos de pares ordenados são: A (400; 1,80) e B (800; 2,20).

Cálculo do coeficiente angular: $m = \frac{2,20 - 1,80}{800 - 400} = 0,001$

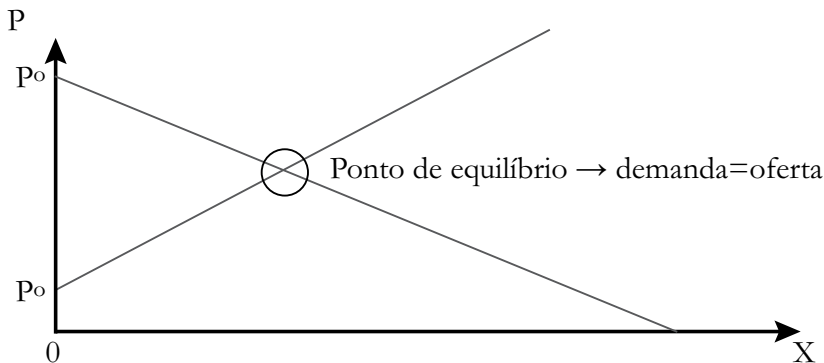
Cálculo do coeficiente linear: tomando-se o ponto A e substituindo

na função oferta ($p=mx + n$), juntamente com o m encontrado, tem-se $1,80 = 0,001.400 + n$. Resolvendo-se a equação, acha-se $n = 1,40$.

Função oferta: $p = 0,001x + 1,40$. A partir dessa função, pode-se fazer uma variação de preços e se chegar às quantidades de sorvetes que provavelmente serão comercializadas, de acordo o interesse do produtor.

Função Oferta *versus* Função Demanda: o Ponto de Equilíbrio

Considerando-se como variável apenas o elemento preço, a demanda passaria a crescer com a queda nos preços. Ocorre que ao aumentar essa demanda, o produto passa a escassear e há uma tendência de alta nos preços. Esse fato atrai mais produtores e há também um aumento de produto no mercado, provocando um novo reajuste nos preços. Esse jogo se denomina de ponto de equilíbrio e é onde, teoricamente, a demanda se iguala à oferta. Para se determinar numericamente o ponto de equilíbrio, basta se igualar as duas funções. A seguir, uma ilustração gráfica do ponto de equilíbrio.



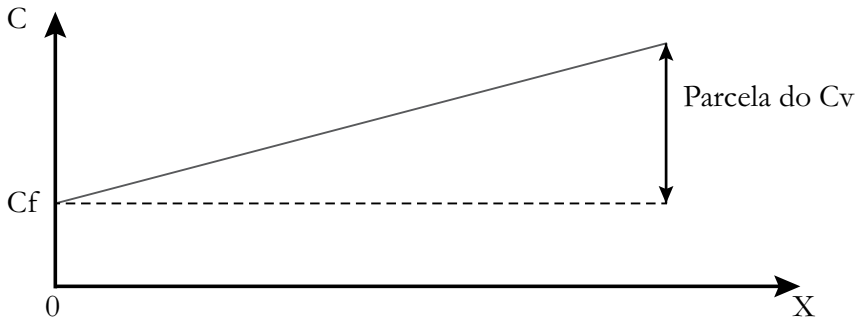
2.3.3 - Função Custo:

A produção de um bem tem, em geral, dois tipos de custos. Aqueles que independem da produção, como sejam: instalação, aluguel, manutenção, seguros e outros que vão existir mesmo se não há produção alguma. São os chamados custos fixos. Outros custos aumentam ou

diminuem conforme a produção dos bens, a exemplo da matéria prima, mão-de-obra, energia para produção e outros que somente existem se houver produção. São os chamados custos variáveis. O modelo matemático da função afim serve para representar esses custos e é um instrumento de grande valia na projeção desse importante item da produção. A parte fixa é representada pela constante C_f e a parte variável por ux , onde u é custo variável unitário e x o número de produtos executados. Assim, a função custo tem o modelo matemático: $C_{(x)}=C_f+ux$.

A função custo é do tipo crescente, devido à parcela do custo variável. Normalmente a reta não parte da origem, por conta do custo fixo que desde a produção inicial já acresce um custo ao produto. Esse custo inicial fixo leva a um custo médio mais alto, quanto menor seja a produção, devido à diluição da parcela fixa sobre as unidades produzidas. Com efeito, matematicamente tem-se: $C_{(m)}=\frac{C_{(s)}}{x}$.

Gráfico ilustrativo



Exemplo ilustrativo:

Uma cooperativa de confecções alugou um galpão por R\$ 500,00 mensais e paga mais R\$ 500,00 mensais a uma empresa de vigilância. Tem também como despesas fixas, R\$ 200,00 com água e energia elétrica. Cada peça produzida custa R\$ 6,00. Qual a função custo que representa a produção total por período? Ao produzir 600 peças por

mês, qual o custo total da cooperativa?

Solução:

Custo fixo: (aluguel + vigilância + água e energia) = 1.200,00;

Custo variável: (custo por peça produzida vezes o número de peças feitas no período) = $6X$;

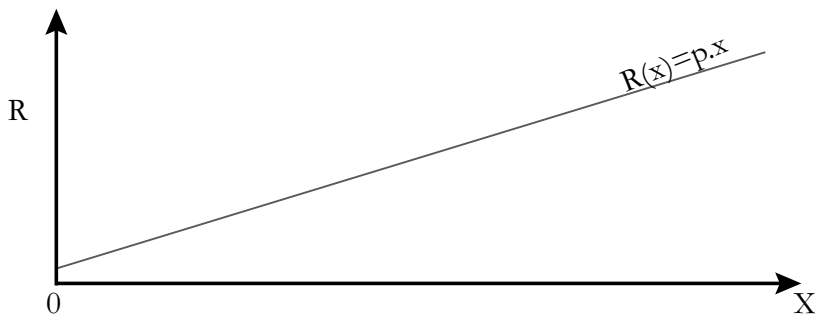
Função final: $=12000,00+6X$.

Custo ao produzir 600 peças: $C(x) = 1200+6.600=4800,00$.

2.3.4 - Função Receita:

O resultado do produto da quantidade vendida pelo preço é definido como receita ou faturamento que é representada pela função matemática: $R(x)=p.x$. Onde, p representa o preço e x a quantidade de produtos comercializada. É uma função crescente, sua reta parte da origem e o coeficiente linear (n) é igual a zero.

Gráfico ilustrativo:



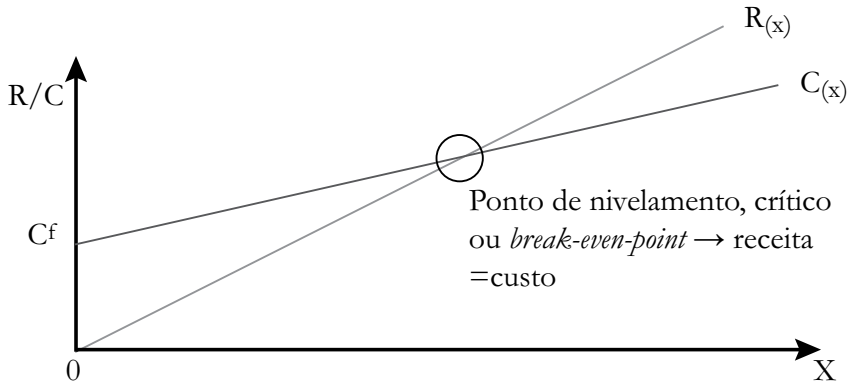
Exemplo:

Aproveitando o exemplo da cooperativa de confecções, caso o preço médio de venda de cada peça seja $p = R\$12,00$, qual seria a receita se a produção mensal fosse toda comercializada?

Solução: $R(x)=12.600 = 7200,00$

Função Receita versus Função Custos: é um objetivo de toda organização - independente de seu tamanho ou de sua finalidade - que

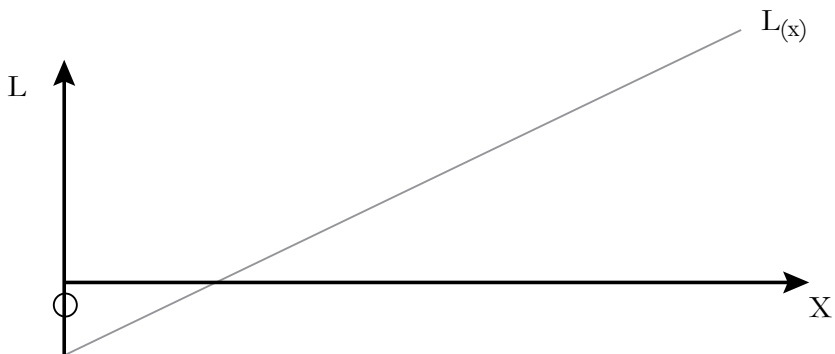
a receita ultrapasse o custo, para manter a sustentabilidade da organização. No momento em que a receita se iguala ao custo, atinge-se o chamado **ponto de nivelamento** ou **ponto crítico** (também chamado comumente no jargão de administração financeira de *break-even point*). A seguir, gráfico ilustrativo do ponto de nivelamento.



2.3.5 - Função Lucro:

Resultante da subtração da receita ou faturamento menos o custo, a função lucro é representada matematicamente por $L(x)=R(x)-C(x)$ ou $L(x)=px-(Cf+ux)$. É uma função do tipo crescente e normalmente se inicia negativa (até que a receita se iguale e ultrapasse os custos).

Gráfico ilustrativo:



Exemplo:

Qual o lucro obtido pela cooperativa de confecções do exemplo anterior?

Solução: $L(x) = R(x) - C(x)$ ou $L(x) = 7200,00 - 4800,00 = 2400,00$.

2.3.6 - Função Depreciação:

Todo bem patrimonial tangível sofre o processo de depreciação. Esse fenômeno decorre do desgaste do bem pela sua utilização ou obsolescência pelo passar do tempo. Existem várias formas e tabelas de cálculos da depreciação por parte dos bens de uma organização. Mas, no cotidiano, comumente se usa do recurso da função linear para cálculo dessa depreciação, pela facilidade de cálculo e por não estar muito longe da realidade. A representação matemática da função depreciação é: $L_{D(x)} = -mx + n$, onde x representa a unidade de tempo decorrida e m e n os respectivos coeficientes angulares e lineares. A depreciação é uma função decrescente. Como toda função linear, pode ser obtida a partir de dois pontos dados. Seu gráfico se assemelha ao da função demanda.

2.4 - Exercícios gerais sobre aplicação de funções lineares

1) As funções de 1º grau têm aplicações diretas na administração de negócios, principalmente para os empreendimentos de pequeno e médio porte (com ou sem fins lucrativos), mesmo sabendo-se que os resultados são aproximados. As aplicações mais comuns são as funções Demanda, Oferta, Depreciação, Custo, Receita e Lucro. Avalie as afirmativas a seguir e escolha a alternativa que torne a resposta correta:

I - A função Custo será sempre decrescente, devido ao fato de ser composta por custo variável e custo fixo. Sendo que esse último será diluído à medida que a produção aumentar. Daí, ele funcionar como fator decrescente na função.

II - Na representação gráfica cartesiana, utilizando-se os eixos de

abscissas e ordenadas, a função Receita inicia sempre no ponto origem.

III - O cruzamento das linhas da função Custo com a função Receita determina o Ponto de Nivelamento.

- a) somente a I é verdadeira
- b) somente a II é verdadeira
- c) somente a III é verdadeira
- d) A I e a II são verdadeiras
- e) A II e a III são verdadeiras

2) Para obter produtos de primeira necessidade de forma mais acessível, uma associação de moradores montou um pequeno mercado comunitário que comercializa uma espécie de cesta básica. O estabelecimento tem como custos fixos R\$ 800,00 e o custo variável por unidade do produto é de R\$ 30,00. Se o mesmo é vendido por R\$ 40,00, quantas cestas necessitam ser vendidas para se alcançar o break-even-point?

3) Trace os gráficos das funções lineares referentes à Receita e Custo do produto anterior, utilizando-se do mesmo par de eixos cartesianos.

4) Uma pequena cooperativa produz vassouras, aproveitando garrafas “pet” descartadas. O custo fixo de fabricação do produto é R\$ 200,00 por mês, e o custo variável por unidade é R\$ 1,50. Cada unidade é vendida por R\$ 3,00, então:

- a) Qual o ponto de nivelamento?
- b) Reduzindo-se o custo variável por unidade em 20%, à custa do aumento do custo fixo na mesma porcentagem, qual o novo ponto de nivelamento?
- c) Trace o gráfico da função lucro.

5) Um pequeno restaurante comercializa refeições com vendas a quilo. As anotações de venda dão conta que ao cobrar R\$ 12,00 por

kg, teve a frequência média de 120 clientes. O gestor do restaurante experimentou aumentar o preço por kg para R\$ 14,00 e a frequência média caiu para 90 clientes.

- a) Construa a função demanda, com base nesses dados.
- b) A partir da função encontrada, qual a frequência projetada para o preço de R\$ 13,00 por kg?

6) Enfrentando dificuldades de se colocarem no mercado formal de trabalho, um grupo de amigos que tem a habilidade de cabeleireiro, resolveu constituir - de forma informal - uma barbearia. Os custos fixos giram em torno de R\$ 200,00 por mês e, pelos cálculos estimados, o custo variável por serviço prestado é de R\$ 2,20. O grupo notou que ao fixar o preço cobrado por serviço em R\$ 7,00, conseguiam uma frequência de 400 clientes por mês. A um aumento de 20% no preço cobrado, a frequência caiu 25%. Com base nessas informações, responda:

- a) Qual a função demanda?
- b) Traçar o gráfico para essa demanda.
- c) Para conseguir 500 clientes, qual o preço que deveria ser cobrado?
- d) Levando-se em conta o primeiro preço cobrado, qual o ponto de nivelamento?
- e) Traçar os gráficos do custo, receita e lucro em um mesmo plano cartesiano.

7) A banana prata ao ser comercializada a R\$ 2,00 por kg, atrai 12 produtores para venda de seus produtos na Ceasa. Quando o preço de venda cai para R\$ 1,50, apenas 8 produtores se interessam a comercializar. Pede-se:

- a) A função oferta.
- b) Qual o preço de venda atrairá 15 produtores, com base na função oferta?
- c) Traçar o gráfico da oferta correspondente à função encontrada.

8) D. Maria confecciona camisas artesanais e ao preço de R\$ 18,00 a unidade, produz 50 unidades por mês. Caso os clientes se dispusessem a pagar R\$ 24,00 por peça, D. Maria estaria disposta aumentar a produção em 20%.

- a) Qual a função oferta?
- b) Com base nessa função, qual o preço que interessaria a D. Maria colocar 55 unidades por mês no mercado?
- c) Traçar o gráfico da função.

9) A Associação de Transportes do Vale Verde conseguiu uma linha de financiamento especial e adquiriu três veículos do tipo van, movida a diesel, para trabalhar na linha de transportes alternativos na zona rural e cidades da região do Vale Verde. A aquisição dos veículos novos - ano 2011 - custou R\$ 240.000,00 para a associação. Sabendo-se que com oito anos de uso os veículos terão um valor residual de apenas 20% do montante inicial, pede-se:

- a) A função depreciação.
- b) Com base nessa função, qual será o tempo - em anos - em que o valor dos veículos atingirá o valor zero?
- c) Traçar o gráfico da função.

10) Um caminhão novo - a diesel - custa R\$ 198.000,00 no ano de 2011. Sabe-se que em 2021 estará com seu valor zerado.

- a) Elaborar a função depreciação.
- b) Qual o valor residual do veículo daqui a seis anos?

2.5 - ESTUDO DE CASOS: aplicação de funções lineares.

I) Dona Antonia tem um pequeno ateliê de costura e sua produção do mês de fevereiro é voltada para o carnaval. O produto chefe dessa época é o “kit” folia para vestir aqueles foliões que se aven-

turam na “pipoca”⁶. O kit é composto de camiseta, short ou bermuda com porta documento interno e boné.

Para planejar melhor o seu negócio e buscar um preço mais competitivo, D. Antonia fez um levantamento minucioso dos gastos do seu produto. Notou que por produto emprega de matéria prima o equivalente a R\$ 12,00 e o custo da costura rateado por unidade é de R\$ 10,00. Gasta com pintura de figuras carnavalescas por kit, a importância de R\$ 1,20. Com aluguel e outros gastos que independem da produção empregou R\$ 2.592,00. Contabiliza ainda que cada embalagem custa R\$ 0,80. Pela sua pesquisa de mercado nota que um preço de venda competitivo seria de R\$ 60,00.

Pede-se avaliar em termos de funções lineares aplicadas à gestão, como está o negócio pensado por D. Antonia. Para isso, calcule:

- 1) Qual o ponto crítico ou de nivelamento?
- 2) Qual o percentual que deve ser reduzido o custo fixo para manter a quantidade do ponto crítico, caso o preço do kit sofra um queda de 10%?
- 3) Qual o lucro se o empreendimento produzir e vender 1.000 unidades pelo preço inicialmente projetado?
- 4) De quanto aumenta percentualmente o lucro, se a venda aumentar de 1.000 para 1.600 unidades?
- 5) Trace, em um só par de eixos cartesianos, os gráficos das funções Custo e Receita para a quantidade vendida no item c.

II) Moradores de um bairro periférico descobriram que poderiam buscar orientação técnica junto à universidade pública local, para elaborar um projeto de exploração da área de terra que sobra em seus

⁶ O termo “pipoca” na linguagem popular baiana significa aquele folião que participa do carnaval de rua sem estar em um bloco carnavalesco ou em camarotes.

lotes. Depois de muitas conversas e visitas ao local, concluiu-se que os estudantes do curso da área de gestão - orientados por professores - ficariam responsáveis pelo projeto de extensão intitulado “Flores pela Rede”.⁷

O projeto prevê a criação de uma cooperativa para plantação e comercialização de flores via internet. O produto a ser comercializado é um arranjo padrão de flores e complementos, permitindo uma combinação de tipos. Os moradores se organizaram tanto na parte de trabalho, como financeiramente, criando as condições para iniciar a exploração do negócio. Assim, foi constituída uma organização civil, com o devido registro legal em cartório, estatuto aprovado em assembleia. Essa organização se constitui de vinte e cinco moradores, não tem fins lucrativos e seu capital social é dividido em cotas. Todos os seus componentes vão trabalhar na produção e comercialização, não têm vínculos empregatícios e não podem utilizar sua contribuição financeira inicial para auferir lucros, por exemplo, vendendo-a a terceiros. Essa organização também tem o foco em contribuir para o bem estar da comunidade em que está inserida. Assim, tanto pela legislação a qual está submetida, quanto pela ideia geral da sua criação, terá um fundo destinado à educação. A organização conta com uma diretoria, a qual obedece às determinações emanadas da assembleia dos sócios, onde cada um tem direito a um voto.

Sobre a produção, para cada arranjo é consumido em matéria-prima (flores e complementos) a importância de R\$ 12,00 e R\$ 2,50 em embalagens e o custo médio do envio é de R\$ 7,50. A mão de obra para cada produto vendido é de R\$ 3,00. A Cooperativa Flores pela Rede gasta com manutenção do site mensalmente R\$ 600,00. Além desse gasto rotineiro, mensalmente tem outros que também independem da

⁷ Inspirado no vídeo da empresa “Flores Online”, extraído dos casos de sucesso, apresentados no site <http://www.microsoft.com/brasil/pequenasempresas>. Acessado em out/2008). Os dados apresentados são imaginários, não guardando qualquer relação com as contas reais da organização, as quais não foram consultadas. Trata-se aqui de um exercício acadêmico que busca criar uma situação de aplicação prática. Qualquer semelhança com os dados reais terá sido mera casualidade.

produção: a conta de energia elétrica está em torno de R\$ 1.200,00. Para o gasto com telefone mais internet foi firmado um pacote com a companhia telefônica no valor de R\$ 400,00 por mês; o aluguel mensal do espaço físico onde funciona a sede do empreendimento custa R\$ 800,00. A média de gasto com transportes no mês é de R\$ 300,00 e conta ainda com serviços de vigilância terceirizado, cujo gasto mensal é de R\$ 500,00. Cada componente da associação, além do ganho pela mão de obra para cada arranjo que confecciona, tem como pró-labore R\$ 250,00 mensalmente, a título de remuneração das atividades gerais que são necessárias para o funcionamento do negócio, incluindo aí o plantio e colheita das flores. Em termos de vendas, a Flores pela Rede comercializa cada produto por R\$ 42,00.

Então, tendo em vista a condição de técnico orientador do projeto, com base nos dados acima informados, responda às questões a seguir, utilizando o modelo matemático de funções lineares aplicadas.

1) A Cooperativa Flores pela Rede obterá lucro (sobra) a partir de quantas unidades vendidas por mês?

2) Trace o gráfico demonstrando o *break-even-point* ou ponto de nivelamento para o empreendimento. Sugestão de escala para o gráfico: eixo x - de 100 em 100 unidades; eixo y - de 2.000 em 2000 unidades.

3) Qual o percentual de lucro ou sobra, em relação ao faturamento, quando são comercializados 1.500 arranjos no mês?

4) Para aumentar em 10% o lucro do item anterior, quanto devo diminuir percentualmente o custo variável por arranjo, caso o faturamento se mantenha o mesmo?

5) Se quando o empreendimento ofertasse seu produto a R\$ 30,00, tivesse por mês a procura 800 clientes e para o preço de R\$ 50,00 vendesse 400 arranjos, qual seria a função demanda?

6) Na situação em que o mercado consumidor pagasse R\$ 38,00 por arranjo, tivesse disponível para venda 500 arranjos e quando o consumidor se dispusesse a pagar R\$ 48,00 pelo produto, os produtores colocariam 700 arranjos no mercado, qual seria a função oferta?

7) Com base nas respostas das questões 5 e 6, determine o ponto de equilíbrio do mercado (quantidade de produto e preço).

Respostas:

Exercícios

1) Letra E.

2) $X = 80$ cestas.

3) ?

4) a) P N (133; 400);

b) P N (133; 400).

5) a) $p = \frac{1}{15}x + 20$

b) $x = 105$.

6) a) $p = -0,014X + 12,6$;

c) $p = 5,60$; d) P N (42; 293).

7) a) $p = 0,125X + 05$;

b) $p = 2,38$

8) a) $p = 0,6X$;

b) $p = 21,00$

9) a) $D(x) = -24000X + 240000$;

b) $x = 10$ anos.

10) a) $D(x) = -19800X + 198000$

; b) R\$ 79200,00

Estudo de casos

Caso I: 1) P N (72; 4320); 2) 16,67%; 3) R\$ 33408,00; 4) 64,67%

Caso II: 1) $x = 592$; ? 3) 24,52%; 4) 4,12%; 5) $p = -0,05X + 70$; 6) $p = 0,05 + 13$; 7) P E (570; 41,50).

O valor do dinheiro⁸ no tempo.

Em se tratando de finanças, o valor do dinheiro muda com o passar do tempo. Ou seja: uma determinada quantia terá seu valor alterado ao longo de períodos em que for aferido. Esse postulado é de fácil aceitação, uma vez que no dia a dia tem-se vários exemplos dessa situação. Quer seja nas compras efetuadas para pagar a posteriori, quer seja no capital que se toma emprestado ou mesmo na aplicação de nossas economias. Para o cálculo numérico dessa variação, existe um conhecimento específico que nos é dado pela matemática financeira, objeto do presente texto.

3.1 - Conceitos básicos em matemática financeira⁹

A matemática financeira trabalha com cinco elementos - capital, montante, taxas de juros, juros e tempo - utilizando-os para a construção de modelos matemáticos que permitirão traduzir em valores, as variações do dinheiro ao longo do tempo. Dessa forma, é fundamental a definição conceitual desses elementos do ponto de vista financeiro, para que os modelos matemáticos propostos possam ser absorvidos

⁸ Dinheiro = “Recursos reais disponíveis para consumo ou investimento” Juer, Milton. Matemática financeira: praticando e aplicando. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2003, p.9.

⁹ Assaf Neto, Alexandre. Matemática Financeira e suas aplicações. Capítulo 1. São Paulo: Atlas, 2008. 10 ed.

mais facilmente. Além desses elementos para a constituição de fórmulas, outros conceitos empregados na matemática financeira, a exemplo do calendário e diagrama de fluxo de caixa, estarão explicitados nesse tópico, pois são de grande importância para a compreensão e solução dos problemas envolvendo a variação do dinheiro ao longo do tempo.

- **Capital:** também chamado valor presente, é o valor financeiro que se toma emprestado ou o valor de algum bem ou serviço comprado que não é pago à vista; ou ainda, o dinheiro poupado que se aplica para obter um rendimento. É representado pela letra C ou mais usado na atualidade como PV, tendo em vista a nomenclatura das calculadoras financeiras e planilhas eletrônicas (notadamente HP e Excel).

- **Juros:** é o custo pelo uso de um capital tomado emprestado ou a remuneração sobre um capital economizado que se empresta, em um determinado período de tempo. Essa cessão do capital tem bases matemáticas e contratuais acertadas previamente. A cobrança de juro é, basicamente, composta de três elementos: o risco de devolução do empréstimo, a perda de valor da moeda pela inflação e o ganho (lucro) do capital para o seu proprietário. No meio financeiro é representado pela letra J. O juro também é chamado de rendimento.

- **Montante:** também chamado de valor futuro, representa a soma dos juros formados ao longo do tempo e incorporados ao capital. É representado pela letra M ou mais usado na atualidade como FV pela razão já exposta no item capital. Dessa definição pode-se tomar a equação básica para a capitalização:

FV = PV + J. Essa equação norteará todas as fórmulas dos diversos regimes de capitalização.

- **Prazo:** unidade de tempo em que será cobrado o juro devido pelo uso da capital. É representado comumente pela letra n. Sua periodicidade pode ser em qualquer espaço de tempo acertado pelas partes. Os mais comuns são: dia (d), mês (m), trimestre (t), quadrimestre (q), semestre (s) e ano (a).

- **Taxa de juros:** é o coeficiente de remuneração do capital, acertado pelas partes (ou aceito tacitamente quando do contrato do empréstimo ou aplicação). A taxa de juros tem duas formas de apresentação - a percentual e a unitária - sempre seguidas da unidade do período em que deve incidir. É representada pela letra i .

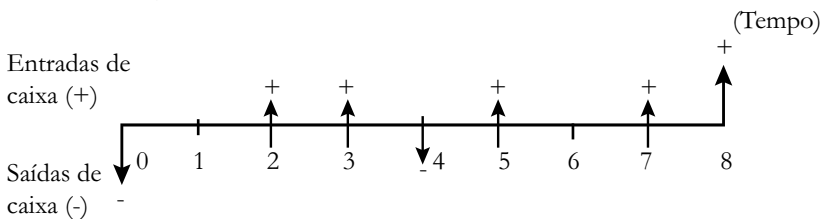
Forma percentual: $i = 2,5\%$ a.m.

Forma unitária: $i = 0,025$ a.m.

Na operação das fórmulas, deve-se atentar para dois detalhes muito importantes a cerca da taxa de juros:

- 1) a taxa de juros deve estar na sua forma unitária, para seu emprego na fórmula;
- 2) o tempo e a taxa têm que estar na mesma unidade de período, para que possam ser utilizados nos cálculos.

- **Diagrama do fluxo de caixa:** é o registro gráfico da movimentação financeira ao longo do tempo. Constitui-se de uma linha horizontal, na qual se assinala os períodos de tempo e de várias setas verticais que registram as entradas e saídas ao longo do tempo. A convenção mais comum é a de que as setas para cima (+) registram as entradas de caixa e as setas para baixo (-), as saídas de caixa. Para melhor esclarecimento, vide esquema abaixo¹⁰.



- **Uso do calendário:** existem duas formas de se contabilizar o prazo em dias para a apuração dos juros incorridos na operação:

- 1) A contagem do prazo pelo número exato de dias transcorridos

¹⁰ Assaf Neto, Alexandre. Matemática Financeira e suas aplicações. Capítulo 1. São Paulo: Atlas, 2008. 10 ed, p.2.

efetivamente pelo calendário civil, utilizando-se o ano de 365 dias para a apuração do juro. Diz-se então que esse cálculo é de juros exatos.

- 2) Toma-se o calendário como ano de 360 dias e o mês como tendo 30 dias. É o uso corriqueiro no comércio e por esse critério os juros são calculados como comercial ou ordinário. Não havendo referência explícita ao calendário, entende-se que é o modo comercial que está em uso.

3.2 - Sistemas ou regimes de capitalização¹¹

A capitalização é a forma de apuração e incorporação dos juros, quanto à incidência da taxa sobre o capital e é dividida em: SIMPLES e COMPOSTA¹².

3.2.1- Capitalização simples

É a forma de capitalização em que a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial para a formação dos juros e estes não são incorporados ou integralizados ao capital inicial ao longo do prazo em que perdure o empréstimo ou aplicação. A integralização dar-se-á ao final do prazo e sua progressão é aritmética, resultando em um crescimento de juros linear. Esse regime de capitalização normalmente é utilizado para curtíssimos períodos de tempo ou para cálculo de juros de mora.

Capitalização simples - fórmulas

As fórmulas são de aplicação bastante simples e envolvem somente equação do 1º grau. Como já foi dito anteriormente, as operações envolvendo juros simples são de uso mais restrito, mas o seu entendi-

11 Assaf Neto, Alexandre. Matemática Financeira e suas aplicações. Capítulo 1. São Paulo: Atlas, 2008. 10 ed.

12 Do ponto de vista dos intervalos de tempo de incorporação dos juros ao capital a capitalização pode se apresentar como Contínua e Descontínua. A primeira significa que o processo de formação e incorporação dos juros se dá a intervalos infinitesimais, com grande frequência de capitalização, ou seja, um fluxo monetário distribuído ao longo do tempo. A segunda, configura a formação dos juros ao final dos intervalos de tempos (mês, ano, etc). Nesse momento é que os juros poderão ser incorporados ao capital. É o regime mais comum e é ao que o presente texto irá se debruçar.

mento será de grande valia para a resolução de situações envolvendo a capitalização no regime de juros compostos, porque em ambos os regimes o que se procura é traduzir justamente a variação do dinheiro no tempo. Deve ser sempre lembrado o cuidado em observar se a taxa de juros e o tempo estão na mesma unidade de período, bem como se o uso do calendário é civil ou comercial.

Os juros resultam da incidência da taxa de juros sobre o capital, por um determinado período. Assim, tem-se:

$J = PV \cdot i \cdot n$ ou $J = C \cdot i \cdot n$, a depender da notação que se queira usar. Nesse texto, prioriza-se o uso da notação PV e FV em vez de C e de M, para ficar mais de acordo com as notações das planilhas eletrônicas e das calculadoras financeiras.

Dessa equação pode-se deduzir o cálculo do **capital (PV)**, da **taxa de juros (i)** ou do **tempo (n)** quando esses elementos forem o que se procura conhecer. Para tanto, a partir da fórmula estabelecida, procura-se isolar o elemento a ser calculado no lado direito da igualdade.

$$PV = \frac{J}{i \cdot n}; \quad i = \frac{J}{PV \cdot n}; \quad n = \frac{J}{PV \cdot i}$$

Somando-se os juros ao capital, tem-se o montante. E, para estabelecer a fórmula que calcula esse montante, parte-se da equação básica da matemática financeira, como exposto a seguir:

$$\mathbf{FV = PV + J}$$

Substituindo J pela sua fórmula de cálculo, tem-se:

$$FV = PV + PV \cdot i \cdot n \text{ (lembrando que PV é o mesmo que C e FV = M).}$$

$$\text{Colocando os termos comuns em evidencia: } FV = PV(1 + i \cdot n).$$

Da equação acima, tem-se as derivações (não são fórmulas novas, apenas deduzidas da básica):

$$PV = \frac{FV}{(1 + i \cdot n)}; \quad i = \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{n}; \quad n = \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{i}$$

Taxa proporcional

Em algumas situações serão necessários ajustes da taxa para se adequar a sua unidade ao período do tempo. Por exemplo: tem-se a taxa de 12% a.a. e se deseja transformá-la em mensal, para calcular os juros do período de 2 meses. Quando se trata de capitalização simples, essa transformação é feita por proporcionalidade, através de uma regra de três simples. No exemplo citado:

12% a.a. ----- 12 meses

X% a.m. ----- 1 mês logo, $x = 1\%$ a.m.

Na prática, divide-se ou multiplica-se a taxa dada pelo número de unidades de tempo contidas no período total da taxa.

Equivalência financeira

Em matemática financeira duas quantias só podem ser comparadas se estiverem na mesma data ou se procedendo a equivalência de uma delas para a data que se quer fazer a comparação. O mesmo vale para somar ou subtrair valores. Isso devido à variação do dinheiro ao longo do tempo. Com base nesse princípio é possível se transportar um ou mais valores de uma data para outra no futuro ou no passado, calculando-se seu valor nessa nova data. Esse processo é denominado de EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA. Elege-se a data de referência que se pretende (chamada data focal) e com o auxílio das fórmulas são calculados os novos valores. É um processo muito útil para, por exemplo, renegociação de dívidas ou mesmo parcelamento das mesmas.

3.2.2 - Exercícios gerais sobre capitalização simples

1) Qual o juro pago pelo empréstimo de um capital de R\$ 2.000,00, durante 3 meses, a uma taxa de juros de 2,5% ao mês? O regime de capitalização é o simples.

2) A que taxa – regime de juros simples – corresponde o pagamento de R\$ 300,00 de juros, por um empréstimo de R\$ 2.600,00, durante 5 meses?

3) Um capital de R\$ 1.500,00 foi aplicado em uma CDB, a uma taxa de juros de 0,8% a.m. e rendeu R\$ 48,00. Qual o prazo da aplicação, sabendo-se que o regime adotado é o de juros simples?

4) Qual o capital que aplicado à taxa de 1,1% a.m. terá de juros R\$ 220,00 em seis meses, no regime de juros simples?

5) Qual o montante que se conseguirá com a aplicação de um capital de R\$ 4.000,00, a uma taxa de juros de 0,9%, durante cinco meses, no regime de juros simples?

6) Em quanto tempo uma dívida dobrará de valor, para um capital tomado por empréstimo numa dessas financeiras que cobra uma taxa de juros de 12% a.m.?

7) (Concurso AFTN/1998) Indique, nas opções a seguir, qual a taxa unitária anual proporcional à taxa de juros simples de 5% ao mês?

a) 60,0; b) 1,0; c) 12,0; d) 0,6; e) 5,0

8) (Concurso fiscal de ICMS, Sefaz-MS/2000) Um banco oferece a seus clientes um tipo de aplicação financeira com as seguintes características: prazo igual a quatro meses; remuneração à taxa de juros simples de 1,5% a.m.; imposto de renda igual a 20% do juro, pago no final da aplicação. Um cliente pagou R\$ 36,00 de imposto de renda. Seu montante líquido (montante menos o imposto de renda) foi:

a) R\$ 3.168,00; b) R\$ 3.156,00; c) R\$ 3.144,00; d) R\$ 3.132,00

9) João Paulo decidiu comprar um computador e uma impressora, cujo preço total à vista era de R\$ 2.500,00. Porém, não dispondo de todo o capital, deu 20% do valor como entrada e um cheque de R\$ 2.300,00 para 60 dias. Qual a taxa mensal cobrada na operação, sabendo-se que a operação está na base da capitalização simples?

10) Um pequeno comerciante tem duas promissórias a vencer nos próximos 30 e 90 dias, com valores de R\$ 900,00 e 1.200,00 respectivamente. A taxa de juros cobrada é de 4% a.m., regime de juros simples. Devido a uma alteração no seu fluxo de caixa, prevê que não terá como pagar no cronograma estabelecido. Propõe como alternativa, resgatar toda a dívida em 60 dias, à mesma taxa e regime de capitalização. Qual o valor a ser resgatado?

Respostas:

1) $J = R\$ 150,00$

2) $i = 2,31\% \text{ a.m.}$

3) $n = 4 \text{ m}$

4) $PV = R\$ 3.333,33$

5) $FV = R\$ 4.180,00$

6) $n = 8\text{m } 10 \text{ dias}$

7) Letra d

8) Letra c

9) $i = 7,5\% \text{ a.m}$

10) $X = R\$ 2.089,85.$

3.2.3 - Capitalização composta

É o regime de capitalização em que há a incorporação dos juros ao capital em cada período referenciado pela taxa de juros, incidindo esta sobre os juros integralizados ao capital no período. O crescimento dos juros é de forma geométrica ou progressão exponencial. É a forma utilizada largamente no mercado para cálculo das prestações a pagar, resgate de empréstimos ou aplicações financeiras.

Nessa forma de capitalização, ao final de cada unidade de tempo os juros são incorporados ao capital e a taxa de juros passa a incidir também sobre os juros do período referenciado pela taxa de juros, resultando no chamado “juros sobre juros”, o valor presente – PV tem

um fator de crescimento exponencial, explicitado na dedução da fórmula que calcula o montante, a seguir:

Para cálculo de um montante em juros simples, tem-se que $FV = PV(1 + i.n)$. Se o cálculo for efetivado período a período unitariamente, o $n = 1$. Logo, o montante do final do primeiro período será $FV_1 = PV(1 + i)$.

Para o período seguinte, o valor presente será o FV_1 e como n continua igual a 1 (período unitário), o novo valor futuro (FV_2) será obtido pela multiplicação de FV_1 pelo fator $(1 + i)$. Assim,

$$FV_2 = PV(1 + i)(1 + i)$$

$$FV_2 = PV(1 + i)^2.$$

No terceiro período, o valor futuro é calculado analogamente:

$$FV_3 = PV(1 + i)^2(1 + i)$$

$$FV_3 = PV(1 + i)^3.$$

Deduz-se que para um período n , o montante FV_n é dado por:

$$FV_n = PV(1 + i)^n.$$

Como se vê, as operações de cálculo de juros e conseqüente montante, decorrido certo período, pelo empréstimo ou aplicação de um capital utilizam fórmulas diferentes daquelas utilizadas na capitalização simples. A fórmula básica de cálculo do montante e suas derivações aqui utilizadas são:

$$FV = PV(1 + i)^n \quad PV = \frac{FV}{(1 + i)^n} \quad i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 \quad n = \frac{\log \frac{FV}{PV}}{\log(1 + i)}$$

Há uma razão de base conceitual para a incorporação dos juros ao capital e a cobrança dos juros no período seguinte a esse novo capital com juros integralizados. O dono do capital ao emprestar seu dinheiro, deveria receber os juros ao fim de cada período unitário de incidência da taxa (a.m; a.t.; a.s; e assim por diante). Por exemplo, um certo capital emprestado por um semestre, a uma taxa de juros ao mês, importa

em uma quantia de juros ao final de cada mês, até completar o semestre, quando o capital deverá ser resgatado. Porém, vencido o primeiro mês e os juros daquele período não são entregues ao credor. Assim, este estará perdendo a oportunidade de aplicar o capital referente aos juros. Para que não haja prejuízo, esses juros são tomados como um “novo empréstimo” e incorporados ao capital anterior. Ou seja: sobre ele haverá incidência da taxa de juros.

ATENÇÃO: O regime de capitalização composta é o usado corriqueiramente nas operações de crédito, financiamentos e aplicações financeiras. Por isso, quando não houver uma referência ao regime de capitalização utilizado, subentende-se que os cálculos deverão ser realizados no regime de capitalização composta. Em geral, não estando explicitado que a capitalização é em regime simples, a capitalização adotada é a composta. O mesmo vale para o tipo do calendário a se adotar: quando não está especificado que a operação usa o ano civil ou juros exatos, adota-se os prazos na modalidade prazo comercial: ano de 360 dias e mês de 30 dias, por ser o tratamento mais corriqueiro das transações bancárias e comerciais.

Tecnicamente a capitalização composta é mais correta, pois permite o fracionamento de prazo e uma equivalência de capitais em qualquer parte do tempo de empréstimo. O que não é possível com a capitalização linear.

Taxas equivalentes

Também na capitalização composta necessita-se às vezes de adequar a unidade da taxa ao período de tempo em que a questão é posta. Exemplo: um empréstimo por 8 meses e a taxa de juros dada ao ano (a.a). A conversão dessa taxa para meses não pode ser feita proporcionalmente como no regime de capitalização simples. É um processo mais complexo, denominado de EQUIVALÊNCIA DE TAXAS, no qual se leva em conta a natureza exponencial da capitalização composta. A seguir, as fórmulas de conversão.

Conversão da taxa mensal para anual

$$i_a = (1 + i_m)^{12} - 1$$

Conversão da taxa mensal para semestral

$$i_s = (1 + i_m)^6 - 1$$

Conversão da taxa anual para mensal

$$i_m = (1 + i_a)^{\frac{1}{12}}$$

Observe que o expoente é sempre a quantidade de partes da unidade da taxa conhecida (aquela que está dentro do parêntesis), contida na unidade da taxa que se procura (à esquerda do sinal de igualdade). Assim, é possível se estabelecer uma fórmula genérica para a equivalência de taxas:

$i_y = (1 + i_x)^{\frac{a}{b}}$, onde o quociente a/b representa a quantidade de partes da taxa X, contida na taxa Y.

Taxas nominais

É comum nas transações comerciais, a informação sobre a taxa de juros adotada aparecer da seguinte forma: $i_a = 12\% \text{ a.a. captabilizada mensalmente}$.

Quando assim aparece, a incidência da taxa se dará mensalmente para cálculos dos juros no período de um mês e integralizado ao capital, para cálculo do mês seguinte. Observe ainda que a unidade da taxa - ano, difere da unidade da capitalização - mês. Essa forma de apresentar a taxa esconde uma taxa efetiva, de valor mais alto. No exemplo acima, o valor efetivo da taxa a é de 12,68% a.a. A taxa efetiva é dada pela fórmula:

$$i_{efetiva} = 1 + \frac{i_{nominal}}{X} - 1$$

onde X é o número de unidades de capitalizações, contidas no período unitário da taxa. No exemplo dado, tem-se:

$$i_{a(\text{efetiva})} = 1 + \frac{0,12}{12}^{12} - 1 = 0,1268 \text{ a.a.} = 12,68\% \text{ a.a.}$$

ATENÇÃO: Toda vez em que a taxa se apresente com o seu período de capitalização diferente da sua unidade, ela é uma taxa nominal. Para se efetuar o cálculo dos juros, é necessário que se transforme essa taxa em efetiva. A taxa nominal não pode ser levada diretamente à fórmula, sem antes transformá-la em efetiva.

Um exemplo muito comum de taxa nominal é a apresentação na forma: $i_a = X\% \text{ a.a., TP}$. Isso quer dizer que a taxa é anual, mas com a incorporação dos juros pela Tabela Price, cuja capitalização comumente é mensal.

Período não inteiro

Às vezes o período n se apresenta com uma parte decimal. Isso ocorre quando se quer calcular, por exemplo, os juros no período de 45 dias, a uma taxa periódica mensal. Então, tem-se que $n = 1,5$ mês. Nesse caso, existem duas convenções para cálculo do montante no regime de juros compostos: linear e exponencial.

-Convenção linear: por essa convenção, os juros referentes à parte inteira do período são calculados de acordo a fórmula vista na capitalização composta, ou seja: o fator que multiplica o capital (PV) é $(1+i)^n$, onde n aqui é somente o número inteiro do período. Já para a parte decimal do período, os juros serão calculados pelo fator da capitalização simples, ou seja: $(1+i.k)$, onde k é a parte decimal ou fracionária do período. Logo, o montante será calculado pela fórmula:

$$FV = PV(1+i)^n(1+i.k)$$

Exemplo: Calcular o montante de um empréstimo de R\$ 1.000,00, por 75 dias, a uma taxa de juros de 4% a.m., no regime de juros compostos, utilizando-se a convenção linear.

Solução:

Dados: PV = 1000,00; $i = 0,04$ a.m.; $n = 2,5$ m

$$FV = 1000,00 (1+0,04)^2(1+0,04.0,5)$$

$$FV = R\$1103,23.$$

- Convenção exponencial: nessa convenção, aplica-se simplesmente a fórmula da capitalização composta para cálculo do montante, incorporando a parte fracionária ou decimal do período ao n do expoente.

Resolvendo o exemplo anterior pela convenção exponencial, tem-se:

$$FV = 1000,00(1+0,04)^{2,5}$$

$$FV = R\$1103,02.$$

Nota-se, no exemplo dado, que a convenção linear apresenta um resultado ligeiramente maior (uma diferença de R\$ 0,20). Isso se deve ao fato de que ao elevar a parte fracionária o fator $(1+i)$, este sofre uma redução. Ao passo que ao calcular a parte fracionária como linear (convenção linear) há um acréscimo proporcional à multiplicação da taxa pela parte fracionária do período. No exemplo visto, a diferença não causa impacto significativo, devido ao período ser curto e o capital tomado por empréstimo ser de pequena monta. Entretanto, para somas mais altas de capital levantado e por períodos mais longos, a diferença de custo será bastante significativa e crescerá na mesma proporção que esses dois fatores cresçam.

Equivalência de capitais:

Os mesmos princípios da equivalência de capitais para a capitalização simples são válidos para a capitalização composta.

3.2.4 - Exercícios gerais sobre juros compostos

1) João Francisco tomou a título de empréstimo R\$ 1.200,00 para pagamento em 3 meses, a uma taxa de 3,8% am, no regime de juros compostos. Quanto pagará de juros?

2) Ana Maria pagou de juros por um empréstimo, a quantia de R\$ 280,00. A duração desse empréstimo foi de 5 meses e o capital empre-

stado foi de R\$ 2.000,00, no regime de capitalização composta. Qual a taxa de juros cobrada?

3) Qual o capital que aplicado a uma taxa de juros de 0,9% a.m., por seis meses, juros compostos, corresponde a um montante de R\$ 7.700,00.

4) Um banco disponibiliza uma linha de crédito direto para seus clientes, nas seguintes condições: taxa de juros de 4,6% a.m., pagamento do montante em 120 dias e regime de capitalização composta. Além do encargo financeiro, o cliente deverá pagar uma taxa administrativa de 0,5% sobre o valor do empréstimo, também a ser paga no final do período de empréstimo. De quanto será o total a pagar por um capital tomado por empréstimo, no valor de R\$ 5.000,00?

5) A loja de calçados Pé & Conforto dispunha de R\$ 12.000,00 para uma futura ampliação. Aconselhado pelo gerente de sua conta bancária, o gestor da pequena empresa aplicou o recurso até a decisão de efetuar realmente a reforma. Passados três meses de aplicação, a uma taxa de juros de 1,0% a.m. (juros compostos), foi aconselhado a resgatar o montante e fazer outra aplicação em um título bancários a uma taxa superior à primeira, desde que imobilizasse o capital por 180 dias. Findo o prazo, a loja resgatou um montante superior em 10% ao capital aplicado inicialmente. Qual a taxa do segundo período de aplicação?

6) A que taxas de juros anuais correspondem as taxas:

a) $i=1\%$ am; b) $i=8\%$ as; c) $i=6\%$ at; d) $i=0,1\%$ ad;

7) A que taxas de juros mensais correspondem as taxas:

a) $i=6\%$ as; b) $i=54\%$ aa; c) $i=4\%$ at; d) $i=0,1\%$ ad;

8) O Banco A oferece uma taxa de 14,40% aa para aplicações em

sua CDB e o Banco B oferece a taxa de 14,03% aa, capitalizada mensalmente. Qual a proposta mais vantajosa?

9) (AFTN, 39)¹³ Uma pessoa aplicou \$ 10.000,00 a juros compostos de 15% a.a. pelo prazo de três anos e oito meses. Admitindo-se a convenção linear, o montante da aplicação ao final do prazo era de:

- a) \$ 16.590,00 b) \$ 16.602,00 c) \$ 16.698,00 d) \$ 16.705,00 e) \$ 16.730,00

10) (CFC, Bacharel/02.1, 150) Um capital \$ 9.000,00 é emprestado à taxa de juros compostos de 8% a.a. por 4 anos e 4 meses. Tendo por base a capitalização anual e utilizando a convenção linear, ao término desse período, o montante será igual a:

- a) \$ 10.950,25 b) \$ 11.315,24 c) \$ 11.875,30 d) \$ 12.570,92

11) (ESAF, 98) A melhor aproximação do capital que, em 10 meses e 25 dias, a juros compostos de 9% a.m. calculados pela convenção linear, resultaria no montante de \$ 235.506,45 é:

- a) \$ 92.540,00 b) \$ 92.572,98 c) \$ 92.586,80 d) \$ 96.800,00 e) \$ 119.243,77

12) (AFTN/02.1, 228) Um capital é aplicado a juros compostos à taxa de 20% ao período durante quatro períodos e meio. Obtenha os juros como porcentagem do capital aplicado, considerando a convenção linear para cálculo do montante. Considere ainda que: $1,204 = 2,0736$; $1,204,5 = 2,271515$ e $1,205 = 2,48832$.

- a) 107,36% b) 127,1515% c) 128,096% d) 130% e) 148,832%

¹³ Bruni, Adriano Leal. Matemática Financeira para Concursos. São Paulo: Atlas, 2008, p. 98. Exercícios de 09 a 13: questões de concursos públicos.

Respostas dos exercícios:

1) $J = R\$ 142,06$

2) $i = 2,65\% \text{ a.m.}$

3) $PV = R\$ 7.297,00$

4) $FV = R\$ 6.010,45$

5) $i_2 = 1,097\% \text{ am}$

6) a) $12,68\% \text{ a.a.}$; b) $16,64\% \text{ a.a.}$; c) $26,25\% \text{ a.a.}$; d) $43,31\% \text{ a.a.}$;

7) a) $0,976\% \text{ a.m.}$; b) $3,66\% \text{ a.m.}$; c) $1,32\% \text{ a.m.}$; d) $3,04\% \text{ a.m.}$;

8) Proposta B

9) Letra E

10) Letra D

11) Letra A

12) Letra C

Operações de descontos

4.1 - CONCEITOS

Segundo Juer (2003:11) “define-se desconto como sendo o abatimento ao qual o devedor faz jus quando antecipa o pagamento de um título, ou, ainda, como sendo os juros cobrados pelo devedor para antecipar o pagamento de um título”.¹⁴

Essa operação é muito usada no comércio, como fonte de financiamento do capital de giro das empresas, principalmente aquelas de médio e pequeno porte. O empresário de posse de títulos de crédito antecipa o vencimento junto à rede financeira e em troca recebe um valor líquido menor que o valor de resgate. Na prática, está pagando juros pelo prazo de antecipação.

Embora existam fórmulas para cálculo do desconto tanto no regime de capitalização simples, como na composta, essas operações se realizam em sua grande maioria no curto prazo e, daí, a adoção do regime de capitalização simples para a cobrança do desconto, salvo recomendação explícita ao contrário. No presente texto será abordado

14

Juer, Milton. Matemática financeira: praticando e aplicando. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2003.

somente o desconto no regime de juros simples. Reserva-se a forma composta para operações de longo prazo.

Seguindo a definição, temos que para qualquer tipo de DESCONTO, a equação básica é: $D = N - V$, onde

D é o desconto a ser pago pelo adiantamento do recebimento.

N é o valor de resgate do título. Na linguagem corrente das operações de desconto: valor nominal.

V é o valor líquido recebido por antecipação. Significa o mesmo que valor presente.

4.2 - TIPOS DE DESCONTOS: RACIONAL, COMERCIAL E BANCÁRIO.

Racional ou “por dentro” — aquele em que a taxa de juros incide sobre o valor presente do título.

Desconto racional simples (fórmulas):

$$D_r = V_r \cdot i \cdot n \quad V_r = \frac{N}{1+i.n}$$

Substituindo-se essa equação na expressão base do desconto ($D = N - V$), tem-se: $D_r = \frac{N.i.n}{1+i.n}$

Faz-se necessário essa equação porque nas operações de desconto racional, comumente se conhece inicialmente o valor nominal do título, calculando-se o valor líquido a receber posteriormente. Daí, torna-se necessário uma equação para cálculo do desconto (D_r) em função do valor nominal (N).

Comercial ou “por fora” — aquele em que a taxa de juros (d) incide sobre o valor nominal ou futuro do título.

Desconto comercial - fórmulas

$$D_c = N \cdot d \cdot n$$

$$V_c = N (1 - d.n)$$

A taxa do desconto comercial é representada pela letra d , para

diferenciar da taxa do racional i que virá a ser a taxa real, como ficará mostrado adiante.

Bancário - é o desconto comercial acrescido de taxas administrativas (t) cobradas pela instituição financeira e aplicada sobre o valor futuro do título. Alguns autores consideram que em verdade só existem dois tipos de desconto, pois o bancário é apenas uma extensão do comercial.

$$D_b = N \cdot d \cdot n + t \cdot N \quad \text{ou} \quad D_b = N (d \cdot n + t).$$

$$V_b = N [1 - (d \cdot n + t)].$$

4.3 - TAXA IMPLÍCITA

Nos descontos “por fora” e bancários, por ter a taxa de juros aplicada sobre o valor nominal, há um descumprimento do fundamento da matemática financeira sobre juros. Os juros devem decorrer do capital que se toma emprestado. Logo, quando se aplica uma taxa de juros sobre o valor nominal ou futuro do título, está se cobrando juros sobre um capital que em realidade não está no poder do tomador, embutindo uma taxa real maior do que a explicitada. Porém, essa prática é secularmente aceita nas transações comerciais. Assim, para se chegar ao custo real do dinheiro cobrado na transação, é necessário se calcular a taxa implícita ou real da operação. Essa taxa implícita é calculada com base no fundamento do desconto racional - juros sobre o valor descontado ou valor presente. Há duas formas de cálculo:

a) Substituindo-se os elementos dados nas fórmulas de desconto racional;

b) Cálculo direto pela fórmula:

$$i = \frac{d}{1-d \cdot n}$$

4.4 - EXERCÍCIOS GERAIS SOBRE OPERAÇÕES DE DESCONTOS

1) Calcular o desconto racional ou “por dentro” de um título no valor de R\$ 30.000,00 a vencer daqui a 60 dias, com uma taxa de juros de 48% a.a., regime de juros simples.

2) Calcular o valor atual ou descontado, na modalidade “por fora” de um título no valor de R\$ 36.000,00, a vencer em 30 dias, com uma taxa de desconto de 3,0% a.m. Regime de juros simples.

3) Um título com valor nominal de R\$ 5.400,00, é antecipado em 3 meses e o valor recebido é de R\$ 4.956,90. Sabendo-se que a modalidade do desconto é “por dentro”, capitalização simples, calcular a taxa mensal cobrada.

4) Uma operação de desconto bancário é realizada por uma instituição financeira, com prazo de 25 dias. O banco opera com uma taxa efetiva de juros de 56,45% a.a. Determinar a taxa de desconto “por fora”, juros simples, que foi utilizada na operação.

5) Uma pequena mercearia necessitou descontar uma nota promissória de valor nominal de \$ 16.000,00, com 90 dias antes de seu vencimento. Nesta operação, o banco cobra 48% ao ano de taxa de desconto “por fora”, capitalização simples e 2% de despesa administrativa. Calcular o valor líquido liberado à mercearia.

6.) A associação de produtores rurais resolveu descontar um cheque pré-datado para vencer em 45 dias. Recebeu líquido do banco a importância de R\$ 4.200,00. A taxa de desconto da transação foi de 36% a.a. e o desconto realizado na modalidade comercial, regime de juros simples. Determinar o valor nominal deste título.

7) Um pequeno comerciante tem em suas mãos quatro cheques, cujos valores e prazo de recebimento são: R\$ 800,00 para 30 dias; R\$ 1.200,00 para 45 dias; R\$ 600,00 para 30 dias e R\$ 1.400,00 para 60 dias. Necessitando de capital de giro, solicita a um banco a operação de desconto. A instituição bancária lhe cobra uma taxa de desconto de 3,2% a.m. e mais uma taxa administrativa de 1,5% sobre o montante dos títulos. Determinar o valor líquido recebido pelo comerciante. Regime de juros simples.

8) (TCU-AFCE/00 adaptada, 128)¹⁵ Uma empresa desconta um título no valor de face de \$ 50.000,00 em um banco, três meses antes do vencimento, obtendo um desconto de 7,16% do valor nominal do título. Se o banco cobrasse ainda uma taxa de abertura de crédito de \$ 50,00 e 1% do valor nominal do título como imposto financeiro, no momento do desconto do título, qual seria o custo do empréstimo, em termos da taxa de juros real paga pela empresa?

- a) 3% ao mês b) 4% ao mês c) 5% ao mês d) 6% ao mês e) 7% ao mês

9) (Fiscal de ICMS, SEFAZ-MS/00, 234) Uma empresa descontou em um banco uma duplicata de \$ 2.000,00 dois meses e meio antes do seu vencimento, a uma taxa de desconto comercial de 4% a.m. A taxa efetiva de juros da operação no período foi:

- a) 10% b) 10,44% c) 10,77% d) 11,11%

10) (148) Uma empresa comercial pensa em descontar o seguinte borderô. Qual o prazo médio do documento, em dias?

Documento	Valor	Vencimento em dias
004458/7	500,00	30
005789/3	1.500,00	90

15 Bruni, Adriano Leal. Matemática Financeira para Concursos. São Paulo: Atlas, 2008, p. 64. Exercícios de 08 a 12: questões de concursos públicos.

- a) 30 b) 60 c) 75 d) 90 e) nra

11) (CVM-Insp-2-CEC-EM/MF, 193) Certa empresa desconta em um banco três duplicatas na mesma data, à taxa de desconto comercial simples de 6% ao mês. Duplicata 01: 10.000,00, prazo de 30 dias, Duplicata 02: 12.000,00, prazo de 75 dias, Duplicata 03: 20.000,00, prazo de 90 dias. O valor líquido recebido pela empresa foi de:

- a) \$ 42.000,00 b) \$ 39.000,00 c) \$ 36.720,00 d) \$ 36.000,00 e) \$ 25.620,00

12) (ITN adaptada, 004) Um indivíduo deverá liquidar duas dívidas, expressas por dois títulos, um de \$ 37.000,00 e outro de \$ 49.800,00, vencíveis, respectivamente, em 8 e 11 meses, a partir de hoje. A taxa atual de juros simples comerciais é de 6% ao mês. Utilizando-se o critério do valor atual comercial, para que uma promissória de \$ 59.950,00 seja equivalente, hoje, aos dois títulos especificados, o prazo de vencimento da promissória deve ser de:

- a) 15 dias b) 198 dias c) 110 dias d) 134 dias e) 148 dias

Respostas:

- 1) R\$ 2.222,22
- 2) R\$ 34.920,00
- 3) 2,98% a.m.
- 4) 54,32% a.a.
- 5) R\$ 13.760,00
- 6) R\$ 4.398,00
- 7) R\$ 3.748,00
- 8) Letra A
- 9) Letra D
- 10) Letra C
- 11) Letra D
- 12) Letra B.

Séries ou Anuidades

5.1 - CONCEITOS

Tanto as organizações como as pessoas físicas se utilizam de financiamento para aquisição de bens e serviços muito comumente. É comum para grande parte dos indivíduos que a aquisição de eletrodomésticos, aparelhos eletrônicos, imóveis ou até mesmo viagens sejam pagos através de parcelamentos. Por seu lado, as empresas e outros tipos de organizações ao planejarem aquisição de equipamentos de médio a grande porte ou mesmo reformas e ampliações, recorrem ao pagamento em parcelas, de acordo seu poder de desembolso. Também, pessoas ou organizações podem planejar aplicações periódicas em poupança, para gastos futuros. A esse fluxo de caixa, quer seja de pagamento ou de aplicações, se denomina de anuidades, séries ou renda certa e tem como objetivo a liquidação de uma dívida ou formação de um capital.¹⁶

Normalmente esses eventos se dividem em várias parcelas, com características que permitem agrupá-las e facilitar a execução dos cálculos. A construção das fórmulas segue cada grupo de características.

¹⁶ Assaf Neto, Alexandre. Matemática Financeira e suas aplicações. Capítulo 1. São Paulo: Atlas, 2008. 10 ed. Esse autor ainda denomina as séries de Fluxo de Caixa.

Bruni, Adriano Leal. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 2004, 3 ed.

Juer, Milton. Matemática financeira: praticando e aplicando. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2003.

As séries ou anuidades têm as seguintes características:

a) Quanto ao número de prestações:

Finitas - possui um número definido de prestações a pagar ou a aplicar. Exemplo: financiamento de um veículo.

Infinitas ou perpetuidade – prazo não conhecido previamente. Exemplo: recebimento de uma pensão ou aposentadoria.

b) Quanto à periodicidade dos pagamentos:

Periódicas - constância no pagamento ou recebimento das parcelas. Exemplo: pagamento de mensalidade escolar.

Não periódicas – o intervalo entre as parcelas apresentam irregularidade de tempo. Exemplo: recebimento de bônus.

c) Quanto ao valor das prestações:

Uniformes - as parcelas são sempre iguais. Exemplo: um eletrodoméstico financiado com parcelas fixas.

Não uniformes - apresentam variação no valor das parcelas. Exemplo: recebimento de dividendos.

d) Quanto ao prazo dos pagamentos:

Postecipadas - o pagamento ou recebimento ocorre sempre no final do período. Exemplo: prestações de financiamento de um bem durável do tipo “0 + 6”.

Antecipadas - recebimento ou pagamento no início do período. Exemplo: mensalidade escolar.

e) Quanto ao primeiro pagamento:

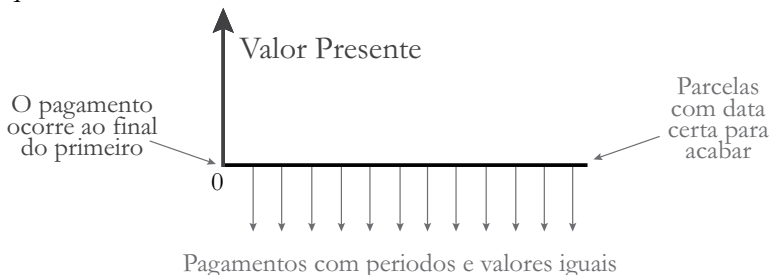
Diferidas - quando entre a aquisição do bem e o primeiro pagamento ocorra um prazo maior que um período (a chamada carência).

Não diferidas - quando o primeiro pagamento ocorre ainda no primeiro período (mesmo que seja no final deste).

5.2 - MODELO BÁSICO

As séries que simultaneamente sejam finitas, periódicas, uniformes, postecipadas e não diferidas constituem o que se chama de **modelo básico** e é o primeiro grupo a ser estudado.

Esquema



Para cálculo dos seus diversos elementos, dispõe-se das fórmulas:

Valor presente

$$PV = PMT \frac{1(1+i)^n}{i}$$

Valor futuro

$$FV = PMT \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$n = \frac{\log\left(1 - \frac{FV}{PMT}\right)}{\log(1+i)}$$

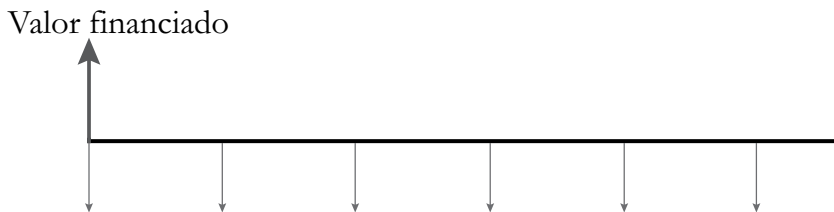
Os elementos que compõem as fórmulas têm o mesmo significado das fórmulas de juros compostos e acresce-se o elemento PMT - prestações.

Valem as mesmas observações com relação à coerência entre as unidades de tempo e taxa, bem como só utilizar nas fórmulas a taxa na forma unitária.

5.3 - VARIAÇÕES DE ANUIDADES A PARTIR DO MODELO BÁSICO

- Série antecipada

Esquema:



Pagamentos acertados

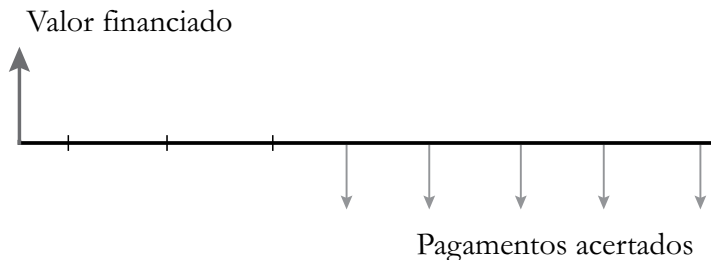
Fórmulas:

$$PV = PMT \frac{1(1+i)^n}{i} \qquad FV = PMT \frac{(1+i)^n 1}{i}$$

Atenção: a fórmula do FV com a correção $(1+i)$, já fornece o valor para o final do período da série.

- Série diferida

Esquema:



$$PV(1+i)^t = PMT \frac{1(1+i)^n}{i} \qquad FV = PMT \frac{(1+i)^n 1}{i}$$

Onde t é o tempo entre o PV e o período imediatamente anterior ao primeiro pagamento.

- **Série perpétua** ou infinita - é assim denominada por não ter um período definido para finalizar. Por essa razão, não há como calcular o FV. Assim, tem-se:

$$PV = \frac{PMT}{i}$$

5.4 - EXERCÍCIOS GERAIS SOBRE ANUIDADES:

1) A Transportadora Arco Iris embalada pela boa *performance dos últimos anos*, incluiu no seu orçamento plurianual a aquisição de um caminhão diesel zero km. O preço do veículo - R\$ 198.000,00 - não comportava no orçamento da empresa de porte pequeno. Mas, a oportunidade de crescer sua participação no mercado, encorajou seus proprietários a pensar num financiamento. Assim, valendo-se de uma linha financeira especial para pequenos empreendimentos, a aquisição foi feita nas seguintes condições: taxa de juros a 1,8% a.m.; 10% de entrada e o restante em 72 pagamentos mensais. Calcular o desembolso mensal da Transportadora Arco Iris.

2) Consultando seu orçamento, um pequeno comerciante verificou que para a aquisição de novos equipamentos para seu estabelecimento comercial, teria como limite para desembolso mensal a quantia de R\$ 850,00. Tomando por base essa prestação, a uma taxa de 3% a.m., quantos meses levaria o comerciante para saldar uma dívida de R\$ 5.200,00 resultante da compra dos equipamentos. O vendedor ofereceu a vantagem da compra ser sem entrada e o primeiro pagamento em 30 dias.

3) Maria Antonieta resolveu abrir uma poupança para servir de uma reserva futura. Verificou que pode depositar mensalmente R\$ 300,00 e ao especular as taxas de juros oferecidas no mercado, conseguiu uma remuneração de 0,85% a.m.. Maria prevê que fará depósitos durante 25 anos, iniciando o primeiro daqui a 30 dias. Qual o montante que será acumulado, caso se mantenham todas as condições?

4) Uma residência está à venda em quatro parcelas trimestrais de R\$ 55.000,00. Ao ser questionado qual o valor se o pagamento fosse à vista, respondeu que venderia o imóvel por R\$ 205.000,00. Com essa quantia em mãos, há no mercado financeiro aplicações que remuneram

com taxa de juros de 0,82% a.m.. É negócio pagar o imóvel à vista? Justifique.

5) Uma loja de eletrodomésticos anuncia a seguinte promoção: TV digital em seis parcelas mensais de R\$ 440,00, taxa de juros de 26,82% a.a., sem entrada e a primeira parcela ao final do 1º mês. Qual o valor do bem à vista?

6) A concessionária de veículos anuncia uma mega promoção: carro popular a taxa 0,49% a.m.; em 36 parcelas de R\$ 900,00, sendo a primeira daqui a quatro meses. Qual o valor do veículo à vista?

7) Um estudante planeja fazer uma pós-graduação no exterior, com início previsto daqui a um ano. Após anotar todos os custos, verificou que necessitará de R\$ 32.000,00 à época, pela projeção da variação da moeda do país escolhido. Caso deposite mensalmente R\$ 2.558,45 - a partir do final do mês - em uma poupança remunerada à taxa de 0,75% a.m., conseguirá seu intento?

8) João Antonio assistiu a uma palestra sobre previdência privada e se interessou pelo assunto. Afinal, o futuro se assegura com as ações do presente e a aposentadoria complementar é algo bastante promissor. Fora informado que as contribuições mensais são a partir de R\$ 150,00 e que essas contribuições são administradas por especialistas no mercado financeiro. Pelo fato de formarem grande volume de capital, pois os grupos são muito numerosos, conseguem uma remuneração à taxa de 19,56% a.a. Suponha-se que João inicie sua adesão ao final de 30 dias.

- a) Se a contribuição durar 20 anos e João desejar uma aposentadoria mensal pelo prazo definido de 15 anos, quanto deverá retirar de benefício, admitindo-se que a remuneração do saldo da conta continuará a mesma quando dos depósitos?
- b) Se o prazo de remuneração for indefinido ou perpétuo, mantidas todas as demais condições, quanto retirará João?

9) Uma empresa transnacional colocou à venda notas promissórias que rendem juros de R\$ 200,00 por semestre, a uma taxa de juros de 0,8% a.m. Esses títulos não têm data de resgate. Qual o valor presente do título?

10) Atualmente a construção civil está em alta e é grande o número de imóveis colocados à venda. Num desses lançamentos, uma incorporadora anuncia um apartamento de dois quartos, localização privilegiada, nas seguintes condições:

- 240 mensalidades de R\$ 800,00, a partir de 30 dias;
- pelo prazo de 3 anos, prestações semestrais no valor de R\$ 5.000,00;
- ao final de 2 anos, por ocasião de entrega das chaves, uma parcela de R\$ 8.000,00
- entrada no valor de R\$ 50.000,00;
- a taxa cobrada para os pagamentos futuros é de 12% a.a.

Nessas condições, qual é o valor do imóvel à vista?

Respostas:

- 1) R\$ 4.435,20
- 2) Aproximadamente 7 meses.
- 3) R\$ 411.876,30
- 4) Sim. O valor à vista está abaixo do valor atualizado das parcelas.
- 5) R\$ 2.464,60
- 6) R\$ 29.063,00
- 7) Sim.
- 8) a) R\$ 5.577,30 b) R\$ 5.194,90
- 9) R\$ 4084,11
- 10) R\$ 156.664,70.

Amortização de Empréstimos e Financiamentos.

6.1 - CONCEITOS

Segundo o professor Alexandre Assaf Neto¹⁷ esses sistemas “tratam, basicamente, da forma pela qual o principal e os encargos financeiros são restituídos ao credor do capital”.

O presente texto tratará de três sistemas de amortização básicos, a partir do qual é possível compreender e construir variações, de acordo as características contratuais e das instituições. Assim, serão aqui estudadas as planilhas dos sistemas: **Sistema de Amortização Constante**, **Sistema de Amortização Francês** e o **Sistema Americano**.

Antes de se iniciar o estudo propriamente dito das planilhas, torna-se necessário explicitar alguns conceitos sobre termos que constarão nas referidas planilhas:

Encargo financeiro ou despesa financeira - esse termo representa os juros cobrados na operação. O autor Assaf Neto (2000) chama a atenção para o fato de que esse encargo pode ter o coeficiente que o define – a taxa - pré-fixada ou pós-fixada. No caso da prefixação, a taxa de juros reflete uma expectativa de inflação já embutida. Ou seja, “os

17

Assaf Neto, Alexandre. Matemática Financeira e suas aplicações. São Paulo: Atlas, 2000 p. 330.

encargos financeiros são medidos por uma única taxa, a qual engloba os juros exigidos pelo empréstador e a expectativa inflacionária (correção monetária) para o período de vigência” (Assaf Neto, 2000:330). No encargo pós-fixado há a separação da taxa inflacionária e dos juros cobrados. Isso ocorre quando é citado contratualmente um indexador para a correção monetária do saldo devedor. Dessa forma, o encargo financeiro passa a ser a correção monetária mais a taxa real de juros acertada com o credor. Esse tipo de encargo ocorre geralmente quando a economia do país está instável ou em contratos de longo prazo, como forma de salvaguardar o poder aquisitivo do capital emprestado.

Amortização - é a parte do principal da dívida que está sendo paga. Ou seja: é a parte do dinheiro que é tomado por empréstimo e que está sendo devolvida, sem contar os juros.

Saldo devedor - o saldo ainda a pagar do principal em determinado momento.

Prestação - soma dos encargos financeiros mais a amortização do período. Em outras palavras: a prestação é o pagamento dos juros e outras taxas mais a amortização. Atenção: não é a prestação que se abate do saldo devedor. O que se abate deste é a amortização.

Carência - prazo que se concede além do prazo convencional visto na série postecipada, para pagamento do principal. Geralmente durante a carência há o pagamento de juros. Mas, dependendo do acerto contratual, poderá haver carência também dos juros e estes serem incorporados ao capital inicial tomado como empréstimo.

6.2 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE – SAC

Tem como característica básica o fato de que suas amortizações são iguais ou constantes, como ressalta sua própria denominação. Apresenta também a característica de ter os juros e a prestação decrescentes.

Preenchimento da planilha

1) Cálculo da amortização: como é um sistema de amortizações constantes, isso se obtém dividindo o principal da dívida (sem os juros) pelo número de prestações que o empréstimo irá ser pago (número de prestações de efetivo pagamento do empréstimo, sem contar o tempo de carência). Logo,

$$\text{Amortização} = \text{Empréstimo} \div \text{Número de parcelas}$$

2) Cálculo dos juros do período: toma-se o saldo devedor do período anterior e multiplica-se pela taxa de juros, obtendo o juro a ser pago no período atual (uma simples conta de multiplicar). Atentar para o fato de que a taxa aqui a ser multiplicada, deve estar na forma de número decimal e não em percentual. Então,

$$\text{Juros} = \text{Saldo devedor anterior} \times \text{taxa de juros}$$

3) Cálculo do saldo devedor do período atual: subtrai-se do saldo devedor do período anterior a amortização do período atual (não é demais lembrar que subtrai-se somente a amortização e não a prestação). Assim,

$$\text{Saldo devedor atual} = \text{Saldo devedor anterior} - \text{amortização}$$

4) Cálculo da prestação do período: efetua-se a adição dos valores das despesas financeiras (juros e taxas outras que houver no mês) mais a amortização do período. Assim,

$$\text{Prestação} = \text{Amortização} + \text{Despesas financeiras}$$

Exemplo ilustrativo:

A quantia de R\$ 20 000,00 é financiada em 5 prestações mensais, à taxa de 3,5% a.m., vencendo a 1ª em 30 dias após a liberação do empréstimo. O banco cobra 1,5% de taxa de abertura de crédito e a taxa do IOF é de 1%. Considerando que o empréstimo será liquidado pelo sistema SAC, preencher a planilha de amortização.

Solução:

PER	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	TAC	IOF	PRESTAÇÃO
0	20.000,00	-----	-----	300,00	200,00	500,00
1	16.000,00	4.000,00	700,00			4.700,00
2	12.000,00	4.000,00	560,00			4.560,00
3	8.000,00	4.000,00	420,00			4.420,00
4	4.000,00	4.000,00	280,00			4.280,00
5	-----	4.000,00	140,00			4.140,00
TOTAL		20.000,00	2.100,00	300,00	200,00	22.600,00

Adicione-se às condições do empréstimo uma carência de 2 meses, com juros pagos durante a mesma. A nova planilha será:

PER	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	TAC	IOF	PRESTAÇÃO
0	20.000,00	-----	-----	300,00	200,00	500,00
1	20.000,00	-----	700,00			700,00
2	20.000,00	-----	700,00			700,00
3	16.000,00	4.000,00	700,00			4.700,00
4	12.000,00	4.000,00	560,00			4.560,00
5	8.000,00	4.000,00	420,00			4.420,00
6	4.000,00	4.000,00	280,00			4.280,00
7		4.000,00	140,00			4.140,00
TOTAL	-----	20.000,00	3.500,00	300,00	200,00	24.000,00

6.3 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS

No Sistema de Amortização Francês - SAF a característica principal é a prestação constante. As amortizações são crescentes e, conseqüentemente os juros decrescem. Esse é o sistema mais utilizado pelo comércio e por ter sua prestação fixa, aparentemente é mais compreendido pela população em geral. Os financiamentos de carros e eletrodomésticos são planilhas do sistema francês ou como é mais conhecido Tabela Price - TP.

Preenchimento da planilha

1) Cálculo da prestação do período: nesse sistema de amortização as prestações são calculadas usando-se a fórmula de cálculo da PMT de uma série de pagamentos do modelo básico. Assim:

$$PMT = \frac{PV}{\frac{1(1+i)^n}{i}}$$

Onde: PMT - prestação; PV – valor financiado; n – tempo; e, i – taxa.

2) Cálculo dos juros do período: toma-se o saldo devedor do período anterior e multiplica-se pela taxa de juros, obtendo o juro a ser pago no período atual, como visto no sistema SAC. Então,

$$\text{Juros} = \text{Saldo devedor anterior} \times \text{taxa de juros}$$

3) Cálculo da amortização: nesse sistema a amortização é obtida a partir da subtração da parcela dos juros da prestação. Logo,

$$\text{Amortização} = \text{Prestação} - \text{Juros}$$

4) Cálculo do saldo devedor do período atual: subtrai-se do saldo devedor do período anterior a amortização do período atual. Assim,

$$\text{Saldo devedor atual} = \text{Saldo devedor anterior} - \text{amortização}$$

Exemplo ilustrativo:

A quantia de R\$ 20 000,00 é financiada em 5 prestações mensais, à taxa de 3,5% a.m., vencendo a 1ª em 30 dias após a liberação do empréstimo. O banco cobra 1,5% de taxa de abertura de crédito e a taxa do IOF é de 1%. Considerando que o empréstimo será liquidado pelo sistema SAF, preencher a planilha de amortização.

Solução:

PER	SALDO DEVEDOR	AMORTI-ZAÇÃO	JUROS	TAC	IOF	PRESTAÇÃO
0	20.000,00	-----	-----	300,00	200,00	500,00
1	16.270,37	3.729,63	700,00			4.429,63
2	12.410,21	3.860,16	569,46			4.429,63
3	8.414,94	3.995,27	434,36			4.429,63
4	4.279,83	4.137,10	294,52			4.429,63
5	-----	4.279,84	149,79			4.429,63
TOTAL		20.000,00	2.148,13	300,00	200,00	22.648,14

Adicione-se às condições do empréstimo uma carência de 2 meses, sem pagamento de juros durante a mesma. A nova planilha será:

PER	SALDO DEVEDOR	AMORTI-ZAÇÃO	JUROS	TAC	IOF	PRESTAÇÃO
0	20.000,00	-----	-----	300,00	200,00	500,00
1	20.700,00	-----	0			0
2	21.424,50		0			0
3	17.429,23	3.995,27	749,86			4.745,13
4	13.294,13	4.135,10	610,02			4.745,13
5	9.014,29	4.279,83	465,29			4.745,13
6	4.584,66	4.429,63	315,50			4.745,13
7	-----	4.584,67	160,46			4.745,13
TOTAL		21.424,50	2.301,13	300,00	200,00	24.225,13

6.4 - SISTEMA AMERICANO

Esse é um sistema mais simples. Nele os juros vão sendo pagos ao longo do período do empréstimo e no final se faz a amortização total junto com a última parcela dos juros.

Para o Sistema Americano – SA basta se calcular os juros sobre o saldo inicial e essa será a prestação até a penúltima parcela. Na última, é só acrescentar o valor total do empréstimo.

Exemplo ilustrativo:

A quantia de R\$ 20 000,00 é financiada em 5 prestações mensais, à taxa de 3,5% a.m., vencendo a 1ª em 30 dias após a liberação do empréstimo. O banco cobra 1,5% de taxa de abertura de crédito e a taxa do IOF é de 1%. Considerando que o empréstimo será liquidado pelo sistema SA, preencher a planilha de amortização.

Solução:

PER	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	TAC	IOF	PRESTAÇÃO
0	20.000,00	-----	-----	300,00	200,00	500,00
1	20.000,00		700,00			700,00
2	20.000,00		700,00			700,00
3	20.000,00		700,00			700,00
4	20.000,00		700,00			700,00
5	-----		700,00			20.700,00
TOTAL		20.000,00	3.500,00	300,00	200,00	24.000,00

6.5 - COMPARATIVO de SISTEMAS de AMORTIZAÇÃO

Ao comparar os sistemas de amortização, deve se levar em conta qual o tipo mais adequado para a situação do tomador do empréstimo nas circunstâncias em que se encontra. Normalmente, o limite da prestação é o fator que mais pesa na escolha do tipo de sistema. O SAC tem inicialmente um desembolso maior, mas em contrapartida resulta num menor volume de juros e em parcelas decrescentes que a partir de certo período poderá ser menor do que em outros tipos. Se o tomador, por exemplo, está com o fluxo de caixa muito comprometido no início do pagamento do empréstimo, a opção é o Sistema Americano, por só exigir o desembolso dos juros no início. Em contrapartida, esse sistema apresentará um volume maior de juros pagos. Concluindo, o tomador deve avaliar suas condições de pagamento e fazer um estudo comparativo, para que o sistema adotado seja o mais adequado, otimizando os custos com despesas financeiras.

6.6 - EXERCÍCIOS GERAIS SOBRE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO:

Para as questões de 1 a 7 elabore as respectivas planilhas de financiamento:

1) Um banco empresta o valor de R\$ 10.000,00, com taxa de 6,4% ao mês, para ser pago em 05 (cinco) pagamentos mensais, sem prazo de carência, calculado pelo Sistema de Amortização Constante (SAC).

2) Um banco empresta o valor de R\$ 10.000,00, com taxa de 6,4% ao mês, para ser pago em 05 (cinco) pagamentos mensais, com 03 (três) meses de carência e juros pagos durante a mesma. Utilizado o Sistema de Amortização Constante (SAC).

3) Um banco empresta o valor de R\$ 10.000,00, com taxa de 6,4% ao mês, para ser pago em 05 (cinco) pagamentos mensais, com 03 (três) meses de carência e sem pagamento de juros durante a mesma (juros incorporados ao saldo devedor), calculado pelo Sistema de Amortização Constante (SAC). Além da taxa de juros o empréstimo terá como despesas financeiras: 1,5% de IOF sobre o total financiado e 1,0% de taxa administrativa sobre o empréstimo inicial, pagamento efetuado no ato da contratação do empréstimo.

4) Um banco empresta o valor de R\$ 10.000,00, com taxa de 6,4% ao mês, para ser pago em 05 (cinco) pagamentos mensais, sem prazo de carência calculado pelo Sistema de Amortização Francês (SAF).

5) Um banco empresta o valor de R\$ 10.000,00, com taxa de 6,4% ao mês, para ser pago em 05 (cinco) pagamentos mensais, com 03 (três) meses de carência e juros pagos durante a mesma, calculado pelo Sistema de Amortização Francês (SAF).

6) Um banco empresta o valor de R\$ 10.000,00, com taxa de 6,4% ao mês, para ser pago em 05 (cinco) pagamentos mensais, com 03 (três) meses de carência e sem pagamento de juros durante a mesma (juros incorporados ao saldo devedor), calculado pelo Sistema de Amortização Francês (SAF).

7) Um banco empresta o valor de R\$ 10.000,00, com taxa de 6,4% ao mês, para ser pago em 05 (cinco) pagamentos mensais, calculado pelo Sistema de Amortização Americano (SA).

8) A safra agrícola financiada por um banco oficial utiliza o sistema americano - SA, a uma taxa de 6% a.a., e o prazo de resgate do empréstimo é de seis meses, com pagamento de juros mensais. Para bancar o seu custeio de plantação e colheita, uma família solicitou R\$ 2.500,00. Pensando na devolução do principal, o tomador resolve construir um fundo de amortização ("Sinking Fund"). Para isso, abre uma caderneta de poupança que paga em média 0,7% a.m., onde deposita regularmente por mês a quantia que formará o fundo. Para bancar os juros do empréstimo mais a parcela do fundo de amortização, quanto desembolsa a família por mês?

9) Um financiamento de máquinas e equipamentos no valor de R\$ 50.000,00, foi concedido sob as seguintes condições:

- doze prestações trimestrais;
- carência de 1 ano, com juros capitalizados durante a mesma;
- Sistema Francês de Amortização (Tabela Price);
- taxa de juros de 13,87% a.a.

Pede-se: a) valor da 1ª amortização paga; b) valor dos juros da 1ª parcela.

10) Roberto é dono de um pequeno supermercado e necessita de um empréstimo de curto prazo, para financiar seu capital de giro. Planeja tomar um empréstimo sobre o qual pague o menor volume de juros.

O gerente do banco escolhido por Roberto, apresentou três tipos de empréstimos praticados pela instituição: SAC; SAF (ou Tabela Price) e SA. Informou ainda que a taxa de juros cobrada é a mesma para todos os tipos de empréstimos, assim como as outras taxas (IOF, TAC, etc...).

- a) Qual o tipo de empréstimo Roberto deve solicitar?
- b) Qual a característica da prestação desse empréstimo?

Respostas

1)

Parcela	Saldo devedor(R\$)	Amortização(R\$)	Juros(R\$)	Prestação(R\$)
0	10.000,00	-----	-----	-----
1	8.000,00	-----	640,00	2.640,00
2	6.000,00	2.000,00	512,00	2.512,00
3	4.000,00	2.000,00	384,00	2.384,00
4	2.000,00	2.000,00	256,00	2.256,00
5	-----	2.000,00	128,00	2.128,00
Total	-----	10.000,00	1.920,00	11.920,00

3)

Parcela	Saldo devedor(R\$)	Amortização (R\$)	Juros(R\$)		IOF (R\$)	Taxa Adm R(\$)	Prestação (R\$)
			Carência	Pagos			
0	10.000,00	-----	---	---	180,68	100,00	280,68
1	10.640,00	-----	640,00	---			-----
2	11.320,96	-----	680,96	---			-----
3	12.045,50	-----	724,54	---			-----
4	9.636,40	2.409,10	---	770,91			3.180,01
5	7.227,30	2.409,10	---	616,73			3.025,83
6	4.818,20	2.409,10	---	462,55			2.871,65
7	2.409,10	2.409,10	---	308,36			2.717,46
8	-----	2.409,10	---	154,18			2.563,28
Total	-----	12.045,50	---	2.312,73	180,68	100,00	14.638,91

5)

Parcela	Saldo devedor(R\$)	Amortização(R\$)	Juros(R\$)	Prestação(R\$)
0	10.000,00	-----	-----	-----
1	10.000,00		640,00	640,00
2	10.000,00		640,00	640,00
3	10.000,00		640,00	640,00
4	8.240,15	1.759,85	640,00	2.399,85
5	6.367,66	1.872,49	527,36	2.399,85
6	4.375,34	1.992,33	407,52	2.399,85
7	2.255,50	2.119,83	280,02	2.399,85
8	-----	2.255,50	144,35	2.399,85
Total	-----	10.000,00	3.919,25	13.919,25

8) Juros = R\$ 12,17 e Prestação = R\$ 409,43.

9) Amortização = R\$ 3.943,72 e Juros = R\$ 1.878,72.

10) a) SAC; b) Decrescente.

Bibliografia

Livros

ASSAF NETO, ALEXANDRE. Matemática Financeira e suas aplicações. 10 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

_____ Matemática Financeira e suas aplicações. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2000

BRUNI, ADRIANO LEAL. Matemática Financeira para Concursos. São Paulo: Atlas, 2008.

_____ Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 2003.

GOLDSTEIN, LARRY ET ALL. Matemática aplicada: economia, administração e contabilidade. Porto Alegre: Bookman, 2000.

HARIKI, SEIJI. Matemática aplicada: administração, economia, contabilidade. São Paulo: Saraiva, 1999.

LARSON, ROLAND ET ALL. Cálculo com aplicações. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1998.

JUER, MILTON. Matemática financeira: praticando e aplicando. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2003.

PUCCINI, ABELARDO L. Matemática financeira: objetiva e aplicada. 6 ed. São Paulo: Sariaiva, 1999.

SILVA, SEBASTIÃO M. Matemática para os cursos de Economia, Administração e Ciências Contábeis. 4 ed. São Paulo, 1997.

VERAS, LILIA L. Matemática aplicada a economia. Capítulo 1. 3. Ed. São Paulo: Atlas, 1999.

Links consultados

<http://www.brasilecola.com/matematica/plano-cartesiano.htm>. Por Marcos Noé. Acessado em 04 de março de 2011.

<http://www.microsoft.com/brasil/pequenasempresas>.

Formato:	15 x 21 cm
Mancha:	11,5 x 16,3 cm
Tipologia:	Garamond (miolo) AvantGarde Md BT (capa)
Papel:	polén soft 80g/m ² (miolo) supremo 250g/m ² (capa)
Gráfica:	Imprima Soluções Gráficas Ltda.
Tiragem:	500 exemplares



ISBN 978-855134630-0

