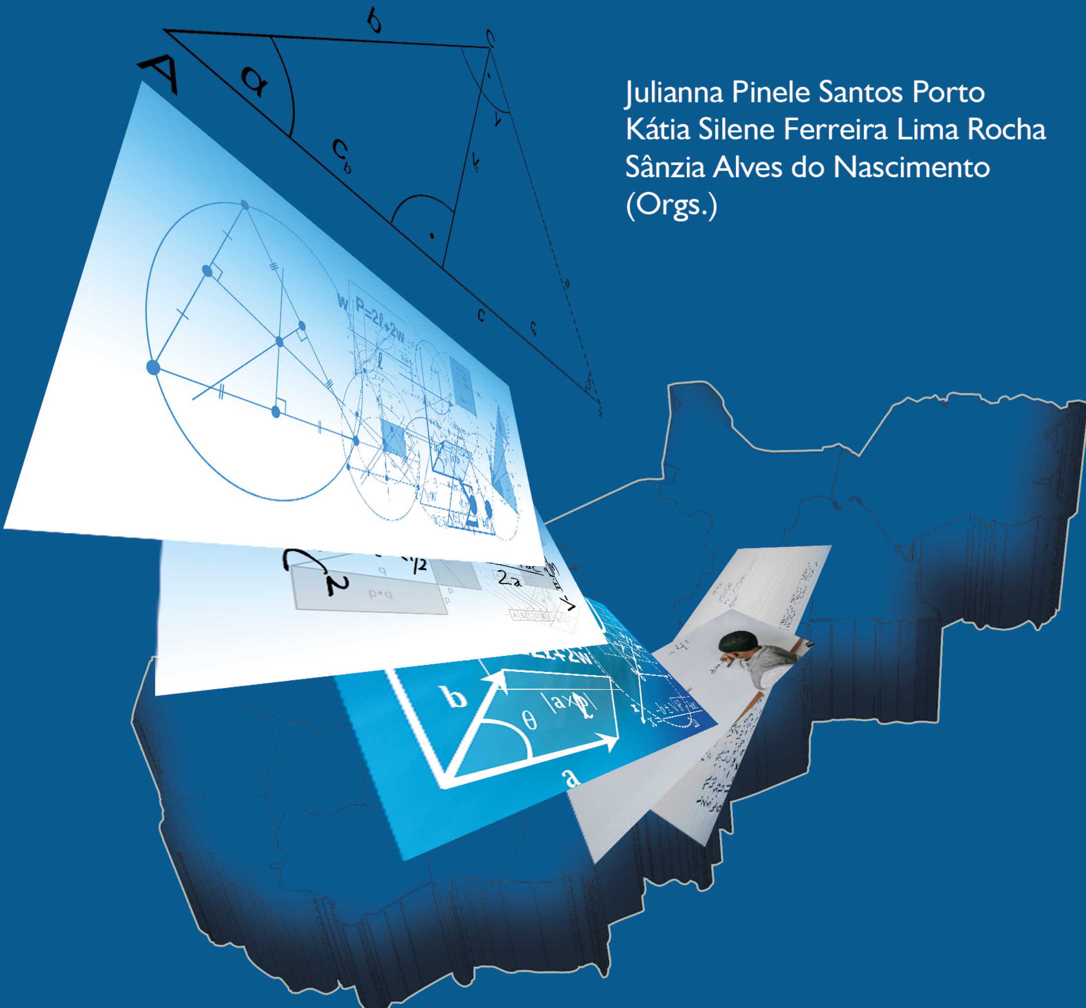
Inovações educacionais em matemática no Recôncavo

Julianna Pinele Santos Porto
Kátia Silene Ferreira Lima Rocha
Sânzia Alves do Nascimento
(Orgs.)



Editora UFRB

Inovações educacionais em matemática no Recôncavo

Julianna Pinele Santos Porto
Katia Silene Ferreira Lima Rocha
Sânzia Alves do Nascimento
(Orgs.)

Inovações educacionais em matemática no Recôncavo

Editora UFRB
Cruz das Almas - BA/ Brasil - 2020

Projeto gráfico, capa e editoração eletrônica:
Antonio Vagno Santana Cardoso

I35o Inovações educacionais em matemática no Recôncavo / Organizadores, Julianna Pinele Santos Porto, Kátia Silene Ferreira Lima Rocha e Sânzia Alves do Nascimento._ Cruz das Almas, BA: EDUFRB, 2020.
280p. – (Coleção Pesquisas e Inovações Tecnológicas na Pós-Graduação da UFRB; volume 10)

ISBN: 978-65-87743-31-8.

1.Matemática – Estudo e Ensino . 2.Práticas Educacionais. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. II. Rocha, Kátia Silene Ferreira Lima. III. Nascimento, Sânzia Alves do. IV.Título.

CDD: 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Central da UFRB.
Responsáveis pela Elaboração - Neubler Nilo Ribeiro da Cunha (Bibliotecário - CRB5/1578)
(os dados para catalogação foram enviados pelo usuário via formulário eletrônico)

Editora UFRB
Rua Rui Barbosa, 710 – Centro
44380-000 Cruz das Almas – BA/ Brasil
Tel.: (75) 3621-7672
editora@reitoria.ufrb.edu.br
www.ufrb.edu.br/editora
www.facebook.com/editoraufrb

Sumário

Prefácio

Anderson Reis da Cruz[1]

O Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) é um programa de pós-graduação *Stricto Sensu* destinado ao aperfeiçoamento dos professores do ensino básico e cuja oferta é nacional. Constituída por uma rede de Instituições Associadas sob a coordenação da Sociedade Brasileira de Matemática, o programa visa a continuidade da formação docente por meio da aquisição de domínio aprofundado dos conteúdos trabalhados em sala de aula e/ou por proposições de novas práticas didático-pedagógicas no ensino da Matemática. A Universidade Federal do Recôncavo da Bahia aderiu à rede de Instituições Associadas do Profmat no ano de 2012 e as suas dissertações têm versado sobre os mais diversos temas da Matemática.

O presente livro traz recortes de algumas das dissertações defendidas ao longo destes anos de existência. Agradeço aos professores: Adson Rocha, Ariston Cardoso, Danilo Ferreira, Eleazar Madriz Lozada, Erikson dos Santos, Genilson de Melo, Juarez Azevedo, Renato Diniz e Sânzia Alves e aos egressos do Profmat/UFRB: Dilmara do Carmo, Fabrícia Lisboa, Jânio de Jesus, João Almeida, Leila de Souza, Luciano Cerqueira, Osnildo Carvalho, Patrícia Souza, Tânia Souza, Ueric Oliveira e Wilson Filho, pelas suas valorosas contribuições à composição deste livro.

---

1 Coordenador Institucional Profmat/UFRB (Gestão 2019–2020). Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (2010). Mestrado em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (2012). Doutorado em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (2016). Atualmente é Professor Adjunto no Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (CETEC – UFRB).

Este texto visa proporcionar ao professor de Matemática do Ensino Básico inspirações para o desenvolvimento de novas práticas em sala de aula, com foco em alguns temas da Teoria dos Números, Geometria, Matemática Aplicada e Matemática Financeira. Ao mesmo tempo em que se exibem sugestões de metodologias para um melhor processo de ensino aprendizagem, são apresentados conceitos formais necessários a um total entendimento dos conhecimentos matemáticos em torno de cada tópico.

Acredito que a prática pedagógica do ensino da Matemática está intimamente relacionada a uma base conceitual adequada acerca dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula. Os temas abordados são apresentados com base nesta ótica, permitindo-se em alguns momentos um aprofundamento que extrapola o que de fato pode ser apresentado a um estudante do ensino básico.

Trazemos sugestões para o uso de ferramentas computacionais para o cálculo de áreas e volumes, e a construção de figuras planas. Apresentamos um estudo sobre uma Geometria não Euclidiana. Temos um estudo sobre trigonometria com aplicações. Introduzimos uma indicação para o uso de ferramentas computacionais no ensino de tópicos de Matemática Financeira e apresentamos métodos iterativos para resolução de equações e sistemas de equações com o uso da Álgebra Linear.

Podemos encontrar aqui proposições de sequências didáticas e experiências em sala de aula relacionadas a metodologias de ensino. Neste sentido, temos como público alvo os docentes em exercício do ensino básico ou recém licenciados. Entretanto, a base matemático-teórica apresentada torna sua leitura agradável a qualquer pessoa interessada pela Matemática. Alguns dos capítulos são acessíveis em qualquer nível de conhecimento.

Tentamos desmitificar o conceito vilanesco que circunda a Matemática. Seja pelo mito que ela é uma disciplina difícil de aprender e ensinar, seja pelo mito de que não é possível apresentar determinados conteúdos de maneira rigorosa e formal.

Finalizo agradecendo ao Comitê Científico designado pelo Colegiado do Profmat/UFRB, composto pelas Professoras Katia Rocha, Julianna Pinele e Sânzia Alves, pelo empenho na coleta e formatação desta obra.

Cruz das Almas, 06 de agosto de 2020.

Apresentação

Katia Rocha
Sânzia Alves
Julianna Pinele

Este livro está composto por onze capítulos que relatam alguns dos trabalhos desenvolvidos como dissertações no Programa de Pós-graduação em Matemática, *stricto sensu*, ao nível de Mestrado, na modalidade Profissional, do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC) da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), doravante chamado Profmat/UFRB[2].

Curso semipresencial de oferta nacional, oferecido em polos distribuídos por todos os estados e Distrito Federal, o Profmat é coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), e surgiu no contexto da Universidade Aberta do Brasil (UAB) – Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES) em 2010, fruto da necessidade de capacitação dos professores do Ensino Básico que atuam efetivamente em sala de aula, no ensino de Matemática. Em 2019, o Profmat contava com 75 instituições associadas, totalizando 96 campi em todo território nacional. O Profmat foi recomendado pela CAPES, reconhecido pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e validado pelo Ministério da Educação com a nota máxima para programas de mestrado, tendo mantido esta nota 5 na avaliação trienal de 2017.

O Plano Nacional de Educação (PNE) atualmente em vigor, que foi sancionado através da Lei Federal nº 13.005, de 25 junho de 2014, tem por objetivo a melhoria da educação no país, e para tal determina as diretrizes, metas e estratégias para a política educacional entre o

2 Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

período de 2014 e 2024. Ressalta-se que, das 20 metas que devem ser atingidas nesse período de 10 anos, o Profmat atende a várias delas. Destaca-se, por exemplo, o atendimento às metas 14, 17 e 18 que tratam, respectivamente, "de elevar o número de matrículas na pós-graduação *stricto sensu*, da valorização do professor e do plano de carreira" (PROFMAT, 2018, p. 6). O PNE coloca em sua Meta 16 o desafio de:

> formar, em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da Educação Básica, até o último ano de vigência deste PNE e garantir a todos (as) os (as) profissionais da Educação Básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino (BRASIL, 2014, anexo).

"De acordo com o Observatório do PNE, até o ano de 2016, 34,6% de professores da Educação Básica concluíram a Pós-Graduação" (PROFMAT, 2018, p. 6). O Profmat vem, portanto, contribuir para o alcance dessa meta, com mais de 5300 dissertações defendidas nos últimos sete anos.

Profmat/UFRB

Em 2011 foi iniciado o processo de adesão da UFRB à rede nacional do Profmat, através da submissão da proposta do Prof. Dr. Eleazar Madriz Lozada ao Conselho Diretor do CETEC. Já contando com parecer favorável da Área de Conhecimento Matemática e Estatística, a proposta foi apreciada em reunião extraordinária do Conselho Diretor em dois de setembro de 2011. Tendo obtido anuência deste conselho, o processo de que tratava a proposta foi encaminhado à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PRPPG), atual Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação, Criação e Inovação (PPGCI). Em dezessete de novembro de 2011, a Câmara de Pesquisa e Pós-Graduação, em sessão ordinária, aprovou por unanimidade a adesão da UFRB ao Profmat, referendada pela Resolução CONAC nº 01/2012, de 15 de fevereiro de 2012 (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA, 2012).

O início das atividades do Profmat/UFRB ocorreu em março de 2012, com sua primeira turma composta por 15 discentes, e um quadro docente de sete professores. Atualmente, o Profmat/UFRB conta com a participação de 13 professores doutores em seu corpo docente. Um total de 47 dissertações já foram defendidas no âmbito desse programa, sobre as mais diversas temáticas, com predominância de abordagens que visam fomentar o uso da tecnologia em sala de aula como aliada ao ensino formal da Matemática[3].

Devido a sua localidade e em razão da distância destas cidades aos demais polos das Instituições Associadas Baianas, o Profmat/UFRB tem oferecido um espaço estratégico para atender aos municípios de Cruz das Almas, Muritiba, Governador Mangabeira, Sapeaçu, Cachoeira, São Félix, Santo Antônio de Jesus, dentre outros municípios do Recôncavo Baiano, formando profissionais que atualmente atuam em diversas regiões da Bahia.

Sobre este livro

O Edital nº 002/2020 da Editora da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (EDUFRB) surgiu como uma oportunidade de selecionar alguns dos trabalhos desenvolvidos pelos egressos do Profmat/UFRB e apresentá-los como um livro, que intitula-se *Inovações educacionais em Matemática no Recôncavo*, remetendo à busca por desenvolver ações voltadas para a formação de profissionais que melhorem a educação básica da região do Recôncavo Baiano.

3 Para obter acesso aos textos completos dos trabalhos, acesse o site do Profmat nacional, disponível em https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=ufrb.

A seguir, apresentamos uma síntese dos próximos capítulos desse livro nos quais podem ser encontrados alguns recursos valiosos a ser adotados nas aulas de Matemática.

Partindo da constatação de que o Desenho Geométrico proporciona um maior entendimento e visualização de problemas que envolvem Geometria e, em particular, o ensino de área de figuras planas, em *Desenho Geométrico e áreas de figuras planas,* Tânia Pinto dos Santos Souza e Erikson Alexandre Fonseca dos Santos trazem uma proposta de trabalho com o uso de régua e compasso na construção de algumas figuras planas associada à verificação das definições e propriedades relacionadas a tais figuras. Além disso, objetiva-se mostrar aos professores a importância das construções geométricas no Ensino Básico, como ferramenta de aprendizagem significativa. Nesta proposta foram realizadas atividades com um grupo de alunos de uma turma do Curso de Informática de um centro de educação profissional baiano, através de encontros semanais durante quatro meses.

Já no trabalho *Proposta metodológica partindo de construções geométricas,* João da Cruz Almeida e Erikson Alexandre Fonseca dos Santos apresentam uma metodologia para o ensino de construções geométricas usando régua e compasso, visando servir de subsídio para professores do Ensino Médio na elaboração de aulas de Geometria. Parte-se de uma reflexão sobre a história do ensino de Geometria no Brasil desde o início do século XX, analisando os principais fatos que contribuíram, positiva ou negativamente, para a abordagem das construções geométricas nas escolas. O recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento (BRASIL, 1998, p. 43).

Nos últimos anos tivemos vários avanços e descobertas no desenvolvimento de *softwares* e recursos tecnológicos, grande parte devido à popularização da internet, assim como, a inclusão digital nos processos educativos garantido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

> É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais (BRASIL, 1998, p. 46).

No que diz respeito às aulas de Matemática, Borba (2016) aponta a calculadora gráfica como um dos primeiros recursos utilizados. Hoje o professor pode contar ainda com *softwares* educacionais, alguns deles gratuitos, a exemplo do *Winplot*[4] *e GeoGebra*[5]*. Esses softwares* conferem mais interatividade ao processo de aprendizagem à medida que, em alguns casos, têm-se as funções de mover objetos e alterar os parâmetros que aparecem nas construções. No que se segue apresentamos algumas propostas com a utilização do *software* GeoGebra.

Partindo do pressuposto de que faz parte da formação do professor ter concepções e competências que irão definir o uso das tecnologias para ensino da Matemática, Luciano de Souza Cerqueira e Renato dos Santos Diniz, em *GeoGebra e isometrias do plano,* trazem uma discussão do *software* GeoGebra como opção metodológica — recurso didático — aos professores de Matemática, nas aulas de isometrias de figuras planas. São apresentadas quatro atividades com uso do GeoGebra, objetivando o estudo das quatro

4 - http://faculty.madisoncollege.edu/alehnen/winptut/Install_Winplot.html

5 - https://www.geogebra.org

isometrias no plano e, dessa forma, deixar aos leitores um modelo/exemplo de atividades a serem desenvolvidas no Ensino Básico.

Com objetivo de apresentar estratégias que facilitem a compreensão sobre o cálculo de volumes dos sólidos geométricos utilizando o Princípio de Cavalieri e o *software* GeoGebra, Patricia Barretto Santos Souza e Erikson Alexandre Fonseca dos Santos, em *GeoGebra e volumes: uma proposta metodológica,* apresentam a realização de oficinas de estudo desenvolvidas com um grupo de discentes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública. Nestes encontros, foram aplicados Testes de Sondagem e de Verificação da Aprendizagem que nortearam o desenvolvimento das atividades.

Em *Estudo das funções trigonométricas na roda-gigante,* Leila Maria Salomão de Souza e Adson Mota Rocha apresentam estratégias que possibilitam uma outra abordagem do estudo das funções trigonométricas e suas inversas. No intuito de motivar o estudo dessas funções, foi aplicado um experimento em uma turma do 2º ano do Ensino Médio com a construção de uma roda-gigante. A partir dos dados obtidos é feita a análise das relações de movimento e esboço dos gráficos. Vale ressaltar que as atividades que envolvem a utilização de *softwares* reforçam no estudante essa condição de ator mais ativo no processo de aquisição do conhecimento (Borba, 2010). Por exemplo, o uso de *softwares* educacionais, quando bem utilizados, além de favorecer a visualização gráfica permite aos estudantes criar conjectura e até mesmo validá-las. Neste sentido, este trabalho apresenta a proposta de utilização do *software* GeoGebra para a visualização do movimento e gráficos dinâmicos, bem como a animação virtual do brinquedo.

Dilmara Maurício do Carmo e Adson Mota Rocha, em *Uma proposta didática do uso do Método da Bissecção,* apresentam uma atividade didática a fim de desenvolver o lado investigativo dos alunos, a partir de outras técnicas de resolução de equações polinomiais pouco conhecidas no Ensino Básico, os chamados métodos iterativos. Nessa prática pedagógica, os alunos perceberão a importância da resolução das equações polinomiais através de métodos iterativos com o uso do GeoGebra como uma ferramenta para visualização gráfica e sua melhor compreensão.

Já em *Problemas de programação linear como temas transversais,* Ueric Silva Oliveira, Adson Mota Rocha e Eleazar Gerardo Madriz Lozada utilizam a programação linear como suporte para temas transversais no ensino de Matemática do Ensino Médio. Assim, são fornecidos subsídios para o professor transitar por meio da transversalidade de certos conteúdos trabalhando com problemas de Matemática Aplicada, além de mostrar como o *software* GeoGebra pode ser um auxiliador na sua resolução.

Considerando a importância da Educação Financeira no Ensino Básico e como ela pode contribuir para a formação de cidadãos mais conscientes e autônomos de sua vida financeira, Wilson Teixeira Vieira Filho e Sânzia Alves do Nascimento analisam, em *Educação Financeira nas aulas de Matemática do Ensino Médio,* a adoção do material da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) para lecionar temáticas voltadas à Matemática Financeira. A partir desta análise, é apresentada uma proposta para o uso desse material pelos professores do Ensino Médio, através do uso do GeoGebra, visando facilitar a compreensão das situações-problema propostas no material e explorar outros aspectos não abordados nele. Desta forma, o aluno não apenas compara os resultados obtidos com o aplicativo e aquele fornecido pelo livro, como também faz uma análise aprofundada de cada atividade proposta utilizando gráficos e tabelas para observação do comportamento devido às mudanças de variáveis. Como principal resultado tem-se a adequação do material da ENEF ao desenvolvimento das habilidades envolvidas nas competências estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a área de Matemática e suas Tecnologias através das atividades propostas.

Além dos trabalhos realizados com enfoque nas práticas educativas utilizando assuntos que são parte do currículo do Ensino Básico, no Profmat/UFRB também foram realizadas pesquisas que relacionam temas matemáticos geralmente estudados apenas no Ensino Superior com os assuntos abordados no Ensino Médio, a partir de metodologias mais simples, visando despertar o interesse dos jovens pela Matemática; já que o sucesso de práticas docentes também tem a formação docente como um de seus vértices.

As Frações Contínuas, embora seja um tema pertencente a Matemática Elementar, é uma área de grande relevância em Teoria dos Números e com alto interesse de pesquisa pelos matemáticos hoje em dia. Uma importante característica das frações contínuas é a facilidade que ela possui de aproximar qualquer número real por uma sequência de números racionais de maneira bastante simples e com grande precisão. Este fato, além de estabelecer a densidade dos racionais no conjunto dos números reais, também fornece uma elegante maneira de exprimir um número real como um quociente infinito de racionais. Toda a teoria é baseada no famoso Teorema da Divisão Euclidiana, resultado fundamental em Teoria dos Números que apesar do seu caráter ingênuo possui grande utilidade e nos permite demonstrar profundos resultados em diversas áreas da Matemática. Neste sentido, utilizando algumas propriedades básicas da Divisão Euclidiana e da Análise, em *Um passeio pelas frações contínuas,* Fabrícia da Conceição Lisboa e Danilo de Jesus Ferreira apresentam a relação existente entre os números reais e as frações contínuas, mostrando que um número real é irracional se, e somente se, ele puder ser representado como uma fração contínua infinita. Ainda neste trabalho, é possível verificar a caracterização das frações contínuas periódicas estabelecendo uma intrínseca relação entre elas e as raízes de um polinômio do 2º grau com coeficientes inteiros. Utilizando estes resultados, os autores apresentam um método para se calcular logaritmos e um método para exprimir raízes quadradas irracionais sob a forma de frações contínuas periódicas.

Já em *Geometria não-Euclidiana: aplicações na Educação Básica,* Osnildo Andrade Carvalho e Juarez dos Santos Azevedo apresentam uma análise das Geometrias não-Euclidianas, em particular a Geometria Esférica, demonstrando que na Matemática, mesmo que se tenha resultados consolidados, estes podem ser questionados apresentando, assim, outras visões. A pesquisa foi de caráter bibliográfico e qualitativo. Em primeiro lugar, expõe-se uma retrospectiva histórica dos postulados de Euclides, e as controvérsias em torno do quinto postulado evocando, desse modo, dois tipos clássicos de Geometrias não-Euclidianas: a Hiperbólica e a Esférica. Além disso, são exibidos como resultado algumas sugestões de atividades da Geometria Esférica para os estudantes da Educação Básica.

Por sua vez, em *Estratégias de Geometria não Euclidiana com Fractais no Ensino Médio*, Janio Paim de Jesus, Ariston de Lima Cardoso e Genilson Ribeiro de Melo apresentam uma proposta de atividade voltada para o Ensino Médio, com o objetivo de introduzir a Geometria não-Euclidiana na Educação Básica com o enfoque na Geometria dos Fractais. Os autores apresentam uma breve revisão sobre a Geometria não-Euclidiana e sobre as principais propriedades dos fractais, e em seguida aplicam uma sequência didática com o auxílio de *softwares* livres. Por fim, é feita uma análise de como a aplicação da sequência didática contribuiu para a inserção deste tema no currículo do Ensino Médio.

Em suma, os onze trabalhos apresentados neste livro representam uma pequena amostra das enriquecedoras pesquisas que foram realizadas ao longo dos oito anos de existência do Profmat/UFRB. Esperamos que sua leitura sirva de inspiração aos professores da rede básica de ensino, e aos futuros profissionais de educação, bem como aos futuros estudantes desse programa de pós-graduação.

Referências

BORBA, M. C. Softwares e internet na sala de aula de matemática. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais[....]** São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016.

BRASIL. Lei n.13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF., 26 jun. 2014. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm. Acesso em: 10 ago. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. **Matemática**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA. Conselho Acadêmico. **Resolução nº 01/2012, de 15 de fevereiro de 2012**. Dispõe sobre a criação do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Matemática, na Categoria Profissional, em nível de Mestrado, do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC) da Universidade Federal do Recôncavo (UFRB), e dá outras providências. Cruz das Almas: CONAC, 2012. Disponível em: https://ufrb.edu.br/soc/components/com_chronoforms5/chronoforms/uploads/documento/resolucao-01-12-conac.pdf.pdf. Acesso em: 10 ago. 2020.

PROFMAT. Profmat: avaliação dos possíveis impactos. 2018. Disponível em https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2018/07/PROFMAT-Avaliacao-de-possiveis-impactos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

O Desenho Geométrico e áreas de figuras planas

Tânia Pinto dos Santos Souza
Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Introdução

De acordo com Jorge (2004) a linguagem gráfica é universal, pois independe dos idiomas e proporciona compreensão imediata e interpretação exata dos símbolos usados. Adquirir o conhecimento que permita compreender a linguagem gráfica e comunicar-se com ela é, hoje, essencial.

Wagner (1998) afirma que estando as construções geométricas cada vez mais ausentes dos currículos escolares, deve-se ajudar a resgatar o assunto do esquecimento e mostrar a sua importância como instrumento auxiliar no aprendizado da Geometria, pois as construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C., época dos Pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática Grega.

Assim, partindo da constatação de que o ensino do Desenho Geométrico vem experimentando um abandono quase completo nas escolas de ensinos fundamental e médio brasileiras, o presente capítulo apresenta uma proposta de trabalho, a partir de atividades realizadas com alunos do quarto ano do Curso Técnico de Informática do Centro Territorial de Educação Profissional Litoral Norte e Agreste Baiano – CETEP/LNAB, situado no município de Alagoinhas, Bahia. Tais atividades foram realizadas no período de 04/08/2014 a 15/12/2014 com encontros semanais cuja duração foi de 100 minutos.

O principal intuito deste capítulo é mostrar aos educadores a importância das construções geométricas no ensino básico para a aprendizagem significativa por parte dos estudantes.

O Desenho Geométrico será apresentado plenamente integrado à Geometria, fazendo com que o estudo dos problemas de construções evolua naturalmente a partir de teorias geométricas que foram trabalhadas com os discentes. Objetiva-se, ainda, apresentar o rigor matemático no que tange à formalização dos resultados por meio da escrita dos procedimentos das construções geométricas realizadas.

Devlin (2004) relatou que as pessoas mais jovens nos Estados Unidos talvez não tenham tido aulas de Geometria. A matéria foi reclassificada há alguns anos, tornando-se opcional, na crença errada de que não era mais suficientemente importante ao mundo de hoje. Embora seja verdade que, hoje em dia, dificilmente alguém faça uso direto dos conhecimentos geométricos, a Geometria era a única matéria do currículo do ensino médio que expunha os jovens ao importante conceito do raciocínio formal e a prova matemática.

O Desenho Geométrico será apresentado nesse texto como motivador no ensino de área de figuras planas, uma vez que o ensino de área destas figuras na educação básica geralmente é desenvolvido com o professor repassando as fórmulas para os alunos sem abordar a contextualização e representação geométrica das mesmas. O conteúdo é apresentado seguido de exemplos e exercícios que são realizados de forma mecânica pelos estudantes, ou seja, os discentes apenas decoram as fórmulas sem compreendê-las.

O desenvolvimento dessa pesquisa está pautado numa visão histórica do Desenho Geométrico e da Geometria e na experiência vivenciada com estudantes do ensino médio ao utilizar as construções geométricas de figuras planas para o efetivo estudo do cálculo das áreas dessas figuras.

Motivados por esse tema e após as diversas leituras e a própria vida, observar-se-á que as aplicações aqui registradas podem ser trabalhadas sem dificuldades na educação básica.

Desenho Geométrico e Geometria

De acordo com Putnok (1993), o desenho nasceu há cerca de 60 mil anos a partir dos avanços das relações entre o homem e a fauna. Através de gravuras encontradas nas cavernas do homem, foi possível entender o seu cotidiano.

Segundo Putnok (1993, p. 7):

> Não se sabe quando ou onde ocorreu a primeira formulação, na forma de desenho, de um problema que se pretendia resolver. Talvez fosse a construção de uma moradia ou de um templo. Contudo, esse fato significou um desenvolvimento na capacidade de raciocínio abstrato, pois o desenho supracitado representava algo que ainda não existia, algo que se pretendia realizar. Essa ferramenta, com o passar dos tempos foi se aprimorando de tal modo que tornou-se uma importância vital para o desenvolvimento de civilizações, como a dos babilônios e os egípcios.

Na antiguidade muitos problemas do cotidiano foram resolvidos utilizando-se de conhecimentos geométricos.

> A Geometria Babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deveriam estar familiarizados com as regras gerais de área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez do triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal (EVES, 2007, p. 37).

Putnok (1993) afirma que foram os gregos que deram um molde dedutivo à Matemática. Explica o autor que na obra Elementos de Euclides (300 a.C.), a Geometria era desenvolvida de um modo bastante elaborado. Diz ainda que é na Geometria Grega que nasce o Desenho Geométrico. Na verdade, não havia diferença entre Desenho Geométrico e Geometria para os gregos. Apenas o primeiro ressaltava-se na forma de problemas de construções geométricas, logo após a exposição de uma situação problema dos textos de Geometria.

O traçado de construções com régua e compasso, desenvolvido pela Matemática Grega, era visto como um jogo em que se obedecia a duas regras:

> Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado (EVES, 2007, p. 134).

Esses instrumentos somente podiam ser usados de acordo com essas duas regras e ficaram conhecidos como instrumentos Euclidianos.

Eves (2007) ainda salienta que a régua utilizada não tinha escala e que o compasso de Euclides se diferenciava dos compassos modernos porque esses últimos possibilitam traçar um círculo com centro num ponto qualquer e tendo como raio um segmento AB qualquer. Ou seja, é possível transportar o segmento AB ao centro C, utilizando para isso o compasso como transferidor. Já o compasso Euclidiano desmontava-se quando se levantava um de seus braços do papel.

Conforme Wagner (1998, p. 1):

> As construções com régua e compasso aparecem no século V a.C. e foram muito significantes no desenvolvimento da Matemática Grega. Para os Gregos, os números limitavam-se somente aos inteiros e uma fração era considerada apenas uma razão entre inteiros. No século III a.C., passou-se a associar grandezas a segmentos de reta. Dessa forma, o conjunto dos números continuava discreto e o das grandezas contínuas passou a ser tratado por métodos geométricos.

Nessa nova álgebra, conforme o autor, "resolver era sinônimo de construir".

Desenho Geométrico no Brasil

Segundo Silva (2006, p. 17):

> O estudo do desenho geométrico foi iniciado no Brasil no ano de 1771 na capitania de São Paulo e em 1779 em Pernambuco. A introdução do Desenho Geométrico efetivou-se durante o reinado de D. João VI, com o intuito de implementar ciência e tecnologia na colônia, e em 1812 a Real Academia Militar começa a ensinar Geometria Descritiva.

Silva (2006) afirma que durante a reforma educacional dos ensinos primário, secundário e superior nos anos de 1882 e 1883, houve uma certa valorização nos dois primeiros níveis de ensino. Tal fato deu-se à intervenção de Rui Barbosa, que propôs uma educação técnica como forma de atingir o desenvolvimento industrial e favorecer o progresso do país. "No ensino primário o Desenho era trabalhado como parte da Geometria prática. No entanto, no secundário, o conteúdo curricular de Geometria era amplo e abrangia Geometria Descritiva, Teoria das Sombras, Perspectivas, Álgebra e Cálculo Diferencial" (SILVA, 2006, p. 17).

Ainda segundo Silva (2006, p. 18):

> [...] pela Reforma Francisco Campos, proposta pelo Decreto no 19.890, de 18 de abril de 1931 e consolidada pelo Decreto no 21.241 de 14 de abril de 1932, a grade curricular do ciclo Fundamental do Curso Secundário, com quatorze disciplinas dispostas em cinco anos, a de Desenho Geométrico, juntamente com outras quatro, estava presente em todas as séries. E, no Ciclo Complementar, com duas séries, instituído pela Reforma de Campos, destinado à preparação para ingresso em escolas superiores, o Desenho Geométrico estava presente na segunda série para candidatos aos cursos de Engenharia e Arquitetura.

Geometria no Brasil

O ensino escolar brasileiro teve origem ainda quando o Brasil era colônia de Portugal com a Companhia Jesuítica, baseado no humanismo cristão e embasado na Filosofia Aristotélica. Nesse período, a Matemática era tida como uma ferramenta para desenvolver um certo modo de raciocinar, necessária para a compreensão da Física.

Mas, segundo Meneses (2007), o estudo de Geometria não recebeu um destaque de importância por grande parte dos Jesuítas. Explica o autor as seguintes razões: “Primeiro por não haver professores qualificados para o ensino da Geometria e, segundo porque a maioria dos jesuítas considerava que o ensino da Geometria era algo sem grande importância na formação do homem.”

Valente (2007, p. 35) diz que:

> [...] o pensamento jesuítico baseava-se na ideia de que o estudo das ciências especulativas como a Geometria, a Astronomia e a Física era um divertimento vão. Considerava esses conhecimentos estéreis, infrutíferos e inúteis por eles mesmos. Para os Jesuítas, os homens não nasciam para medir linhas, para examinar a relação entre ângulos e para empregar seu tempo em considerar os diversos movimentos da matéria.

“A vida era muita curta e seu espírito grande, para se perder tempo com coisas tão pequenas...”, assim pensavam os Jesuítas.

Esse modo de pensar a importância da Matemática fez com que se instalasse no país um estilo de ensino e organização curricular que preservou as características do desenvolvimento de Portugal, ancorado em suas necessidades socioeconômicas, distinto de muitos outros países da Europa.

Alguns anos após a colonização portuguesa houve o aumento populacional e o início de um processo de transformação da sociedade. Tal transformação concretizou-se com a constituição de famílias interessadas em se estabelecerem no Brasil. Com isso, houve a necessidade de se formalizar o ensino. Assim, as escolas jesuítas se expandiram por todo o território nacional. O objetivo era atender o anseio da sociedade, possibilitando aos seus filhos o ensino dado nos moldes europeus.

Segundo Silva (2006, p. 52):

> As primeiras providências de criação de escolas no Brasil ocorreram em 1549, na Bahia, e em 1550 em São Vicente. Nessas duas instituições ensinavam-se a leitura e a escrita, mas somente em 1573, data em que os Jesuítas inauguraram o Colégio do Rio de Janeiro, é que o programa escolar incluiu, além da alfabetização, as quatro operações fundamentais.

Com esses dados ilustrativos, Silva (2006) constatou que o trabalho escolar com Matemática no Brasil teve sua origem nos ensinamentos dos algarismos e das quatro operações básicas. Gradativamente, o ensino foi sendo instituído desde os cursos elementares até a graduação, mas somente em 1757, na Bahia, a Matemática ganhou status de faculdade.

Na Faculdade de Matemática eram ensinados os conteúdos contidos no currículo da Universidade de Coimbra, pois os mestres Jesuítas eram oriundos de Portugal, embora com bastante conhecimento matemático, enfatizavam o que era do interesse da Corte. O foco do trabalho era a Geometria, baseada nos Elementos de Euclides, e Astronomia, pautada nos trabalhos de Ptolomeu. A Matemática trabalhada não refletia os avanços científicos que o continente europeu estava vivendo naquele momento.

De acordo com Tavares (2007), a Corte portuguesa, em 1648, contratou estrangeiros, especialistas em cursos militares, para virem ao Brasil ensinar e formar pessoal capacitado para trabalhos com fortificações militares.

Com esse fim houve uma propagação dos ensinamentos sobre artilharia, onde foram contratados especialistas na arte da guerra para iniciar a aula de Fortificação e Arquitetura Militar, e o Brasil, como colonizado, continuou seguindo o ritmo de desenvolvimento norteado pelos interesses de Portugal. Assim, a presença do ensino da Geometria no ensino brasileiro veio como currículo nos cursos para a defesa e o ataque. Com as aulas de fortificação houve o preparo para uma atividade específica e com isso um profissional qualificado, assim definido:

> Engenheiro: oficial que serve à guerra para ataques, defesa e fortificação de praças. É um matemático hábil, expert e astuto, que faz o reconhecimento das praças que se quer atacar e que mostra ao general o ponto mais frágil, que desenha fronteiras... Ao engenheiro cabe também a invenção de novas bombas [...] (VALENTE, 2007, p. 41).

Tavares (2007) considera que os primeiros relatos verdadeiros de ensino de Geometria no Brasil estavam atrelados à estratégia militar. Para ele, foi José Fernandes Pinto Alpoim que escreveu os dois livros que se tornariam os primeiros livros didáticos no Brasil. O *Exame de Artilheiro* em 1744 que compreendia três capítulos: Aritmética, Geometria e Artilharia; e, em 1748, o *Exame de Bombeiro*, que foi escrito em dez tratados, sendo os dois primeiros dedicados à Geometria e à Trigonometria.

Meneses (2007) afirma que as escolas militares do século XVIII representaram toda a base do ensino de Geometria no Brasil.

> Ao retomarmos esse período do ensino brasileiro, percebemos que foram os cursos da Academia Real dos Guardas-Marinha e da Academia Real Militar que modelaram as origens do ensino de Matemática, criando programas escolares a serem seguidos e estruturando os conteúdos a ensinar (MENESES, 2007, p. 41).

Ainda, segundo Meneses (2007, p. 42):

> Foram criadas as escolas primárias a partir da Carta outorgada por D. Pedro I, de 1824, por meio

> da Lei de 15 de novembro de 1827, a qual estabelecia a gratuidade do ensino primário. Nessas escolas eram ensinadas as noções básicas de Geometria, principalmente aquelas que fossem subsídios à medição de terrenos.

Também houve uma tentativa de desenvolver o Desenho Geométrico conforme afirma Meneses (2007) "havia a necessidade de exercitar o menino em traçar figuras já à mão, já com compasso e a régua".

Contudo, a introdução de Geometria no ensino primário não se concretizou por duas razões: "a ausência de professores qualificados e por não ser uma habilidade exigida no ingresso do ensino secundário" (MENESES, 2007, p. 42).

As tentativas de incluir na escolarização fundamental noções de Geometria como outro conteúdo de Matemática, além das quatro operações fundamentais, foram infrutíferas do ponto de vista do que ocorreu de fato no ensino primário do Império.

> Apesar do texto de lei, o ensino de noções de Geometria não se tornou Matemática escolar nas primeiras letras. De início, por não haver professores primários habilitados e depois, em razão de não ser um conhecimento escolar solicitado para o ingresso em nenhuma instituição de ensino secundário (MENESES, 2007, p. 43).

Foi no ensino secundário que o ensino de Geometria ganhou importância, pois tornou-se pré-requisito para ingresso nos cursos superiores de Direito.

Meneses (2007) afirma que conforme o artigo 8º da Lei de 11 de agosto de 1827, que estabeleceu a criação das Academias de São Paulo e Olinda:

> Os estudantes que quiserem matricular nos Cursos Jurídicos devem apresentar as certidões de idade por que mostrem ter a idade de quinze anos completos, de aprovação da língua francesa, gramática latina, retórica, filosofia racional e moral e Geometria (MENESES, 2007, p. 51).

Meneses (2007) afirma que, apesar de não se afinar com os demais pré-requisitos, o que gerou muitos debates sobre sua permanência, a Geometria se manteve como pré-requisito para o ingresso nos cursos jurídicos, pois havia um pensamento geral de que seu estudo levava o homem a adquirir ideias exatas em Economia Política, desenvolver a razão e fazer raciocinar com exatidão e método. O autor argumenta que em 1832, a Geometria também passou a ser exigida como pré-requisito para os cursos das Academias Médico-Cirúrgicas e nas escolas Politécnicas.

Para Meneses (2007), toda essa significação dada aos conteúdos matemáticos – Álgebra, Aritmética e, principalmente, Geometria – para ingresso no curso superior serviu como fator decisivo para a inclusão desses conteúdos no ensino secundário, deixando assim, de ter um caráter somente militar e tornando-se conhecimento geral da cultura escolar, de forma que esses saberes fossem se transformando em disciplinas escolares independentes, reguladas pelo poder público e caracterizadas como conhecimentos não mais específicos, mas de cultura geral escolar.

A partir do momento, em que o poder público determinou que a Geometria deveria ser conhecimento obrigatório para quem ingressasse nos cursos Jurídicos, Médico-Cirúrgicos e das Escolas Politécnicas, ficou estabelecido, ao nosso ver, que a Geometria foi dando os primeiros passos para se caracterizar como uma disciplina escolar. Meneses (2007) afirma que "as disciplinas escolares quase sempre surgem a partir das finalidades objetivas, ou seja, as finalidades escolares quase que de uma forma geral são regidas e determinadas pelos órgãos políticos".

Desenho Geométrico - aprendizagem

O estudo do Desenho Geométrico é significativo para uma boa aprendizagem nos assuntos referentes à Geometria.

Silva (2006) afirma que os desenhos das figuras geométricas representam parte importantíssima para a compreensão, a fixação e a imaginação criativa. Assim, podemos entender que é importante que o estudante por si só desenhe a figura, procurando caminhos, imaginando construções, pesquisando interconexões, forçando o raciocínio, e exercitando a mente.

Dante (2002) faz uma observação muito importante a respeito do Desenho Geométrico quando diz:

> [...] tudo o que nos rodeia lembra formas geométricas, basta olharmos os objetos que nos cercam. Vivemos em um mundo de formas geométricas. Elas constituem um mundo de diversidades e podem ser constatadas nas artes, na natureza, nas construções, etc (DANTE, 2002, p. 89).

Kalter (1986) afirma que o ensino do desenho pode ser entendido como essencial no aprendizado do aluno em Geometria para que não haja bloqueio das capacidades de planejar, projetar ou abstrair, estabelecendo assim uma relação contínua entre a percepção visual e o raciocínio espacial. Argumenta o autor que fez uma investigação exploratória consistindo de um teste de geometria aplicado a 136 alunos de 8ª série de seis escolas de Curitiba com a finalidade de comparar os rendimentos entre aqueles alunos que tiveram e aqueles que não tiveram a oportunidade de estudar desenho geométrico; um questionário (com questões abertas e fechadas) aplicado a quatorze professores das mesmas, com o objetivo de coletar opiniões sobre a importância do Desenho Geométrico e a Geometria. Os resultados mostraram que os alunos das escolas que ofereceram Desenho Geométrico apresentaram um desempenho significativamente melhor em relação aos outros. Os professores, por outro lado, opinaram que o Desenho Geométrico “concretiza os conteúdos abstratos” da Geometria e as duas disciplinas se completam. Isso nos leva a entender que o Desenho Geométrico poderá contribuir em diferentes campos da Matemática. Efetivamente detectamos correlações entre o Desenho Geométrico e a Geometria, em determinados campos do cotidiano dos homens, em particular, no cálculo de áreas de figuras planas.

Enfim, o Desenho Geométrico permite concretizar os conhecimentos teóricos da Geometria, confirmando as propriedades das figuras geométricas, o que possibilita ao aluno uma maior habilidade na resolução de problemas correlatos.

O porquê

Respalda-se em Neto (2012) para demonstrar as áreas das figuras explicitamente trabalhadas no projeto, por entender que mecanicamente os discentes sabiam aplicar as fórmulas sem entender o seu porquê. Convenientemente, utiliza-se a demonstração adotada por Neto no intuito de confirmar o que na prática eles faziam.

Particularmente traz-se para esse capítulo a demonstração da área de um quadrado de lado unitário.

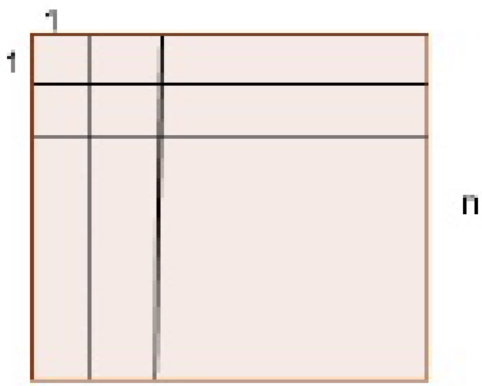
Segundo Neto (2012, p. 234), a área de uma região no plano é um número positivo que se associa à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado e que para polígonos se torna útil quando as propriedades abaixo relacionadas são válidas:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais;
2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, os quais não têm pontos interiores comuns), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores;
3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor;
4. A área de um quadrado de lado 1 cm é igual a 1 cm^2.

Valendo as propriedades de 1 a 4 acima, particiona-se um quadrado de lado $n \in \mathbb{N}$ em n^2 quadrados de lados 1 cada, conforme se vê na Figura 1. Denotando a área do quadrado maior por A_n, deve-se ter A_n igual à soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1, de maneira que

$$A_n = n^2.$$

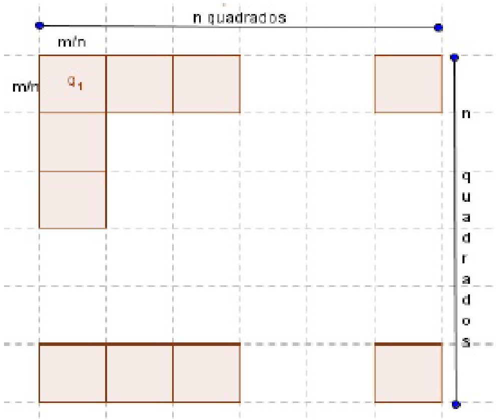
Figura 1 - Quadrado de lado n.



Fonte: Souza (2015, p. 38).

Considera-se agora um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ isto é, com tamanho do lado racional e área $A_{\frac{m}{n}}$. Arranjando n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de lado $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$, como se observa na Figura 2.

Figura 2 - Quadrado de lado m/n.



Fonte: Souza (2015, p. 39).

Tal quadrado maior terá, como já se sabe, área m^2; por outro lado, como ele está particionado em n^2 quadrados de lado $\frac{m}{n}$ cada, sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, isto é,

$$m^2 = n^2 \cdot A_{\frac{m}{n}}$$

Portanto,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = (m/n)^2.$$

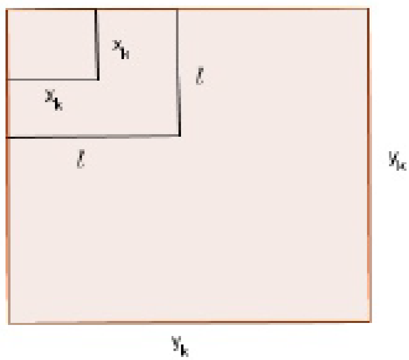
A discussão acima sugere que a área de um quadrado de lado l deve ser igual a l^2. Para confirmar tal suposição, utiliza-se o seguinte argumento: para $k \in \mathbb{N}$, tomam-se números racionais x_k e y_k tais que:

$$x_k < l < y_k \text{ e } y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

É importante ressaltar que a existência destes números está garantida pelo fato de que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, entre dois números reais existe sempre um número racional.

Em seguida, construíram-se quadrados Q_x e Q_y de lados x_k e y_k, respectivamente; o primeiro contido no quadrado dado e o segundo o contendo, como se observa na Figura 3.

Figura 3 - Quadrados.



Fonte: Souza (2015, p. 40).

Como já se sabe calcular áreas de quadrados de lado racional, pela propriedade 3 pode-se garantir que a área A_l do quadrado de lado l deve satisfazer as desigualdades

$$(x_k)^2 < A_l < (y_k)^2.$$

Mas como vale $(x_k)^2 < l^2 < (y_k)^2$, conclui-se que ambos os números A_l e l^2 devem pertencer ao intervalo $((x_k)^2, (y_k)^2)$ de maneira que

$$|A_l - l^2| < (y_k)^2 - (x_k)^2 = (y_k - x_k) \cdot (y_k + x_k) < \frac{1}{k} \cdot (y_k - x_k + 2x_k) < \frac{1}{k}(1/k + 2l)$$

Daí, como $k \in \mathbb{N}$, quando $k \to +\infty$, tem-se que $\frac{1}{k} \to 0$. Além disso $(1/k + 2l) \to 2l$ também quando $k \to +\infty$, o que torna a expressão $(1/k + 2l)$ limitada. Portanto, o produto $\frac{1}{k}(1/k + 2l) \to 0$, quando $k \to +\infty$. Logo,

$$A_l = l^2.$$

As atividades

A seguir, são descritas duas atividades realizadas com os alunos da turma 4TIV1 do Curso Técnico em Informática do Centro Territorial de Educação Profissional do Litoral Norte e Agreste Baiano – CETEP/LNAB do município de Alagoinhas, Bahia, no período de 04/08/2014 a 15/12/2014 com encontros semanais cuja duração era de 100 minutos. Tais atividades foram de grande importância para o ensino de área de figuras planas. Antes de se trabalhar com as demonstrações das fórmulas para o cálculo de áreas das figuras planas elementares tais como o triângulo, o retângulo, o quadrado, o paralelogramo e o trapézio, verificou-se que seria necessária a construção geométrica das figuras em epígrafe. Trabalhando nesse viés foi possível verificar as propriedades e características inerentes a cada figura.

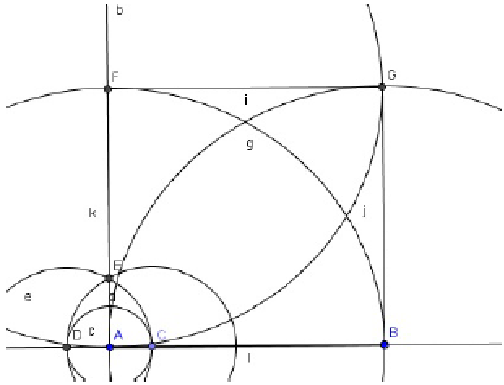
Em particular, serão apresentadas algumas dessas construções com seus respectivos procedimentos.

Atividade: Construir um quadrado de lado 3 cm.

Procedimentos:

1. Marca-se o segmento *AB = 3* cm.
2. Em *A*, traça-se a reta *b* perpendicular a *AB*.
3. Centro do compasso em *A* com abertura igual a *AB* traça-se o arco que interceptou *b* no ponto *F*.
4. Centro do compasso em *B* e abertura *AB* traça-se um arco.
5. Centro do compasso em *F* e abertura *FA* traça-se um arco de modo que interceptou o arco anteriormente traçado no ponto *G*.
6. Liga-se o ponto *F* ao ponto *G* e seguidamente *G* a *B*, obtendo-se o quadrado *ABGF* de lado 3 cm, conforme se vê na Figura 4.

Figura 4 - Quadrado de lado 3 cm.

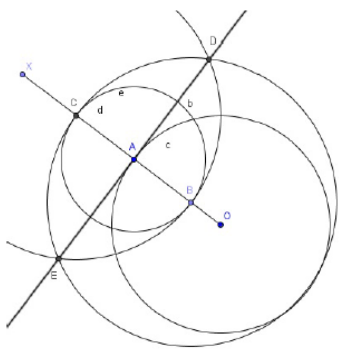


Fonte: Elaborada pela autora.

Atividade: Sejam λ uma circunferência de centro 0 e $A \in \lambda$ um ponto qualquer. Traçar uma reta tangente a λ no ponto A.

1. Traça-se o raio *0A* prolongando-o externamente à circunferência.
2. Centro em *A* e abertura do compasso menor que o raio *0A* traça-se um arco de circunferência obtendo-se os pontos *B* e *C*.
3. Encontra-se a mediatriz de *BC*.
4. *DE* é a reta pedida, como pode ser vista na Figura 5.

Figura 5 - Reta tangente à circunferência.



Fonte: Souza (2015, p. 60)

Após o manuseio com a régua e o compasso para a construção de figuras geométricas, percebeu-se que os alunos tornaram-se mais cuidadosos e preparados para o entendimento de como deduzir e calcular a área de algumas figuras planas elementares, uma vez que os mesmos já tinham conhecimento das propriedades inerentes às figuras trabalhadas durante as construções geométricas das mesmas.

A experiência

Antes de tudo é importante salientar o quanto essa experiência proporcionou um resultado exitoso. O trabalho foi realizado com todos os discentes da turma 4TIV1 do Curso de Informática do Centro Territorial de Educação Profissional do Litoral Norte e Agreste Baiano- CETEP/LNAB.

A turma em epígrafe não representava um exemplo de turma dinâmica e era uma grande preocupação para torná-la mais movimentada, que os alunos fossem mais participativos, pois bem se sabia que naquela turma havia alunos com grande potencial em Matemática.

Para iniciar o trabalho efetuou-se um Teste de Sondagem a respeito do conhecimento que eles tinham sobre as definições das figuras planas elementares que seriam trabalhadas.

Por tratar-se de figuras planas percebeu-se a necessidade que se tinha de saber se eles possuíam a ideia do que era uma figura plana. Assim, a primeira aula consistiu em fazer a identificação entre algumas figuras e objetos trazidos por eles para definir o que era uma figura plana.

As aulas seguintes foram desenvolvidas efetuando as construções geométricas de figuras planas a exemplo do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, entre outras. Vale ressaltar que não houve grandes dificuldades para o manuseio do compasso e da régua. Percebeu-se, na verdade, que os discentes tiveram a oportunidade de desenvolver a habilidade de construir figuras com o uso dos instrumentos supracitados, o que tornou as aulas mais motivadas e dinâmicas como desejado.

As construções propiciaram a verificação das definições e propriedades inerentes às figuras as quais estavam sendo construídas. As argumentações eram efetivadas conforme à formalidade matemática, pois a elegância do saber matemático se expressa através de sua escrita e oralidade.

Imbuídos dos conhecimentos adquiridos por meio das construções geométricas das figuras planas trabalhadas, a proposta foi definir área de uma figura plana, demonstrar as expressões das áreas para os cálculos dessas figuras e efetivar suas aplicações nos exercícios selecionados para verificação desses conhecimentos.

Foi notória a importância dessa sequência didática uma vez que durante a resolução dos exercícios os alunos fizeram conjecturas acerca dos conhecimentos desde às construções geométricas quanto às demonstrações das fórmulas para o cálculo das áreas, possibilitando assim uma significação ao trabalho efetuado.

Após as demonstrações das fórmulas para o cálculo das áreas das figuras procurou-se usar uma metodologia diferente daquela que é normalmente utilizada. Ao invés de fazer um exercício a cada dedução deu-se preferência em deduzir todas as fórmulas para depois então verificar durante a resolução dos problemas o discernimento dos alunos em reconhecer as propriedades das figuras, bem como a linha de raciocínio tomada por eles. Isso porque os discentes argumentaram que quando se deparavam com problemas relativos ao cálculo de área de figuras planas comumente eles não se achavam aptos para resolvê-los por não saberem quais as fórmulas que iriam utilizar e por verificarem que não se trata de cálculos de figuras isoladas — os mesmos possuíam um conhecimento muito precário para resolver problemas mais elaborados. Pensando nesse viés procurou-se trabalhar em torno de problemas interessantes e que serviriam de embasamento para a vida deles. Desse modo priorizaram-se alguns exercícios de Olimpíadas Matemáticas por se tratar de um projeto em âmbito nacional que funciona como um atrativo no ensino de Matemática.

Após a aplicação dos dois questionários percebeu-se um maior entusiasmo nas aulas de Matemática, os alunos tornaram-se mais questionadores e viu-se uma melhoria na oralidade e escrita matemáticas.

Pode-se expressar com firmeza que a experiência foi de muito sucesso uma vez que os objetivos foram alcançados. Como resultado desse trabalho criou-se na Unidade Escolar da aplicação desse projeto um grupo de estudos que reúne interessados pelo saber matemático. Esse grupo ficou bastante motivado pela resolução de exercícios, os quais eram todos de Olimpíadas Matemáticas, pois segundo um deles: “Agora eu tenho condições de resolver os exercícios que apareciam na prova das Olimpíadas de Matemática da segunda fase...”.

Conclusão

Ao longo do percurso pedagógico no ensino de Matemática, puderam-se constatar as dificuldades apresentadas por alunos de ensino médio em desenvolver o pensamento geométrico. Com base nesta constatação, elaborou-se um projeto que serviu de inspiração para esse capítulo, que teve como principal objetivo analisar se o uso do Desenho Geométrico contribui no processo de aprendizagem de Geometria no Ensino Médio e em particular, no ensino de área de figuras planas.

Acredita-se que o trabalho com o Desenho Geométrico contribui no desenvolvimento das habilidades de raciocinar e organizar dados matemáticos, visto que os alunos estabeleceram relações entre as etapas seguidas nas construções e as propriedades das figuras, que os levaram ao entendimento das demonstrações das fórmulas necessárias para o cálculo de suas áreas. Aprenderam a reconhecer uma figura geométrica plana pelas suas propriedades e a relacionar propriedades entre figuras. O trabalho também permitiu desenvolver a iniciativa e a autonomia.

Pode-se afirmar que a experiência aqui relatada no trabalho em epígrafe é muito válida, pois se encontrou no Desenho Geométrico uma boa ferramenta de aprendizagem para o ensino de Geometria. A sua aplicação é viável, pois exige um material de baixo custo, régua e compasso, que pode ser incluído nas listas de materiais escolares e pode ser realizado durante as aulas de Matemática no que tange aos conteúdos de Geometria nas escolas de Ensino Médio.

Vê-se esta pesquisa como uma alternativa, para os professores de Matemática trabalharem com o Desenho Geométrico em suas práticas de ensino, porque permite um ensino de Geometria que traz resultados significativos, diferente de um ensino centrado na aplicação de fórmulas em figuras prontas.

Acredita-se que esta forma de trabalho propicia ao discente e ao docente experiência diferenciada porque possibilita uma participação ativa na construção de conceitos geométricos.

Referências

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2002.

DEVLIN, K. **O Gene da Matemática**. São Paulo: Record, 2004.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2007.

JORGE, S. **Desenho Geométrico: ideias e imagens**. 3. ed., [s.n.], São Paulo, 2004.

KALTER, R. S. **Geometria e o Desenho Geométrico no ensino de 1º grau em Curitiba: Contribuições para uma proposta de integração de conteúdos curriculares**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1986.

MENESES, R. S. **Uma História da Geometria Escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**. vol. 2. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PUTNOKI, J. C. **Desenho Geométrico**. São Paulo: Scipione, 1993.

SILVA, C. I. D. N. **Proposta de Aprendizagem Sobre a Importância do Desenho Geométrico e da Geometria Descritiva**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

SOUZA, T. P. S. O uso do Desenho Geométrico como motivador de aprendizagem no ensino de área de figuras planas. 2015. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática**) –** Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas**, 2015.**

TAVARES, M. C. **Desenho Geométrico**. vol. 3. 14. ed., [s.n.], São Paulo, 2007.

VALENTE, W. R. **Uma História da Matemática no Brasil (1730 - 1930)**. São Paulo: Annablume, 2007.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

GeoGebra e isometrias do plano

Luciano de Souza Cerqueira
Renato dos Santos Diniz

Introdução

Este capítulo busca se inserir no debate sobre uso do laboratório de informática nas aulas de Matemática, considerando-se o uso do *software* GeoGebra como recurso metodológico nas aulas de Matemática para introdução de isometrias do plano, dando destaque as isometrias de figuras planas.

Enxergamos os recursos tecnológicos como aliados aos professores no processo de ensino-aprendizagem de matemática, em especial e destacadamente, o *software* GeoGebra. Faz parte da formação do professor ter concepções e competências que irão definir o uso das tecnologias para ensino da Matemática (DINIZ; LINS, 2010).

Destacamos que nos últimos anos tivemos vários avanços e descobertas no desenvolvimento de *softwares* e recursos tecnológicos, assim como, sua inserção nas aulas e práticas docentes; como nos mostra os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) por intermédio do reconhecimento das diferentes aplicações de recursos tecnológicos, por exemplo, a informática, nas situações de aprendizagem e consideração de como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais (BRASIL, 1998).

Além de dinâmico e prático, o *software* GeoGebra é gratuito, tornando-o de fácil acesso à toda comunidade. Exploramos e destacamos algumas funções e recursos desse, que estão diretamente ligadas ao estudo de isometrias (do plano), a saber: “rotação em torno de um ponto por um ângulo”, “reflexão em relação a uma reta”, “translação por um vetor dado” e “reflexão com deslocamento”.

Sociedade e tecnologias

No mundo contemporâneo a velocidade do desenvolvimento tecnológico nos impressiona. O uso de computadores, *softwares*, *smartphones*, TV e outras mídias digitais, que se constituem como tecnologias de informação e comunicação, tem sido muito frequente no dia-a-dia.

Na Educação, em especial, cada vez mais temos a certeza de que os recursos tecnológicos devem fazer parte do processo de ensino e aprendizagem, no qual o professor é um dos atores.

Além disso, o uso das tecnologias nas aulas desperta a curiosidade e motivam os alunos na busca pelo conhecimento. De fato:

> O professor tem um importante papel como agente promotor do processo de aprendizagem do aluno, que constrói o conhecimento num ambiente que o desafia e o motivam para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e a descoberta de novos conceitos (ALMEIDA, 1996, p. 162).

Dessa forma, é importante que o professor se aperfeiçoe nessas novas tecnologias para o avanço dos processos de ensino e aprendizagem, gerando um conhecimento significativo para o aluno (OLIVEIRA; JUSTO, 2015).

Não restam dúvidas de que são muitas opções de acesso às tecnologias ao homem na sociedade e, portanto, torna-se necessário ao homem aprender a utilizar essas variadas formas de recursos tecnológicos de forma produtiva e eficaz em seu meio.

TICs na educação

A multiplicidade de tecnologias de informação e comunicação (TICs) requer dos professores, em formação e em exercício, a produção de significados e criação de estratégias educacionais na sua utilização em sala de aula.

Um dos objetivos do Ensino Fundamental na Educação Básica é saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos (BRASIL, 1998). Essas informações, através dos conteúdos e do seu cotidiano, devem ocorrer em sintonia com a utilização desses recursos tecnológicos. E, portanto, é necessária essa harmonia no ensino da matemática.

Segundo Takahashi (2000, p. 20), citado por Diniz e Lins (2010, p. 2) a preocupação social com a educação não pode e nem deve ser apenas treinamento:

> [...] das pessoas para o uso das tecnologias de informação e comunicação: trata-se de investir na criação de competências suficientemente amplas que lhes permitam ter uma atuação efetiva na produção de bens e serviços, tomar decisões fundamentadas no conhecimento. Trata-se também de formar indivíduos para "aprender a aprender", de modo a serem capazes de lidar positivamente com a contínua e acelerada transformação da base tecnológica.

Os pressupostos teóricos acima, assim como o mundo que nos cerca, sugerem a utilização das tecnologias como ferramenta pedagógica, em especial, nas aulas de matemática.

Nesse contexto, o uso de *softwares* educacionais tem se tornado uma tendência, em particular nas aulas de matemática, entre eles destacamos o GeoGebra.

GeoGebra e matemática

No momento em que o acesso à informação é cada mais presente, torna-se necessário ao docente a integração de novas ferramentas à sua prática pedagógica. Dentre essas ferramentas, estão os *softwares*.

O *software* GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001 e é totalmente gratuito. A sua utilização se dá em todos os níveis, desde a educação básica ao ensino superior, não só devido ao fácil manuseio, mas como também torna as aulas mais dinâmicas e desperta o interesse dos discentes, como aponta Cerqueira (2016). O GeoGebra está dividido em duas dimensões, onde se interagem por representação geométrica e álgebra, e possui diversas ferramentas que auxiliam nas construções de gráficos, equações e coordenadas (GOMES; OLIVEIRA; QUEIROZ, 2013). O *link* para *download* do *software* GeoGebra é http://www.geogebra.org/about.

Uma proposta para utilização do GeoGebra como uma ferramenta de apoio nas aulas de matemática, em especial nas aulas de Geometria, é trabalhar as noções primitivas de Geometria (por exemplo: ponto, reta) abordados nas séries iniciais do ensino fundamental, assim como construções de outros objetos matemáticos a partir dessas noções primitivas, tais como ângulo, polígono, circunferência, círculo, entre outros. De acordo com as suas competências é que o docente escolherá o *software* que melhor desempenha sua função para alcançar seus objetivos, como enfatiza Brasil (1998, p. 124):

> Quanto aos softwares educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento.

Assim, ao optar pelo *software*, o fizemos tendo em vista que são várias as utilizações do GeoGebra nas subáreas da Matemática, além da Geometria, temos Álgebra, Funções, Estatística e Cálculo.

Nesse sentido, Macêdo *et al.* (2017, p. 3), destaca essa articulação:

> [...] a Matemática é uma construção de grande importância, no qual tem um desempenho decisivo, pois permite resolver problemas do dia a dia. É muito aplicada no mundo do trabalho e é essencial para a construção de conhecimentos, entre outras áreas curriculares.

Neste capítulo, como caso específico, nos atemos na utilização do *software* GeoGebra, nas aulas de Geometria Plana, em particular nas isometrias no plano.

Dessa forma é esperado que nas aulas de Matemática, do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, da Educação Básica possamos oferecer, além do conteúdo: Isometrias no Plano, uma ferramenta tecnológica, o *software* GeoGebra, capaz de unir teoria à prática, como pressupõe os PCNs.

Isometria no ensino

Muita gente imagina a Matemática como a disciplina que lida integralmente com números, enxergando-a somente como aritmética ou algébrica, o que não é verdade. Este fato, também pode ser atribuído ao abandono, por parte de alguns docentes, ao protelar ou relegar o ensino da geometria para o fim do ano letivo, como nos diz Lobo e Bayer (2004, p. 21):

> Esse resgate da Geometria acontece devido a pesquisas realizadas a respeito do ensino de Geometria, dos questionamentos em relação ao abandono desse ramo da Matemática. Os PCNs demonstram uma real preocupação com o ensino de Geometria neste nível.

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, pois por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998).

Partindo dos pressupostos geométricos básicos, trabalhados no ensino fundamental, entre eles: ideia intuitiva de ponto, reta e plano; segmento de reta e semirreta; ponto médio e ponto simétrico; os polígonos; congruência e semelhança de triângulos, notamos que é possível avançar, mostrando, inicialmente, através das simetrias, a relação dos conteúdos com o mundo que nos cerca, fazendo da Geometria Plana uma ferramenta poderosa no desenvolvimento do ensino da Matemática.

Dessa forma, o estudo de isometrias, conteúdo específico é parte integrante do ensino da Geometria na educação básica, tem despertado o interesse de docentes e discentes, considerando que poderia ser mais explorada no Ensino Fundamental, como nos mostra Lobo e Bayer (2004, p. 21)

> A preocupação em se resgatar a Geometria como uma das áreas fundamentais da Matemática tem levado muitos professores e pesquisadores apoiados em teorias cognitivistas a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, no Ensino Fundamental ou em níveis superiores de ensino.

Isometria é uma palavra de origem grega, na qual representa uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura geométrica, mantém as distâncias entre os pontos da figura dada inicialmente. Quanto à classificação, existem exatamente quatro tipos de isometrias do plano: rotações, translações, reflexões e reflexões deslizantes, como afirma Lages (1996, p. 25). A translação, caracterizada por um vetor que define, ao mesmo tempo, a direção, o sentido e o quanto será deslocado; A rotação, que acontece quando todos os pontos do plano se movimenta girando a mesma medida do ângulo em torno de um ponto que se designa como ponto central; A reflexão pode acontecer com relação um ponto ou uma reta, assim, reflexão é uma transformação do plano que para todo ponto P do plano, existe um ponto P’ associado, tal que a reta r da reflexão passe pela mediatriz do segmento [PP’]; A reflexão deslizantes é a composição de uma reflexão com uma translação.

Para justificar o estudo de isometrias no ensino básico destacamos algumas afirmações de Ripplinger (2006, p. 25-26):

> - Uma razão Matemática: a busca da regularidade, os padrões que se repetem a essência do conhecimento matemático;
> - Faz-se presente em outras áreas do conhecimento como Biologia, Arqueologia, Artes, Física, estabelecendo inter-relações dessas áreas com a Matemática;
> - Dentro da própria disciplina, existem conexões entre os conteúdos e poderíamos citar muitos exemplos, um deles nas retas numeradas, os números inteiros;
> - É uma das partes da Geometria, onde o belo, a harmonia na Matemática pode ser facilmente trabalhada;

Diante do exposto, notamos essa possibilidade de trabalhar Isometrias, nas séries finais do Ensino Fundamental, com o auxílio do *software* GeoGebra, como veremos na próxima seção.

Isometrias e GeoGebra

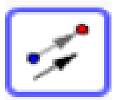
O GeoGebra oferece algumas ferramentas básicas que estão diretamente relacionadas com noções primitivas da geometria e conceitos básicos como, por exemplo, ponto, segmento definido por dois pontos, segmento com dado comprimento a partir de um ponto, reta definida por dois pontos, vetor definido por dois pontos, polígono, polígono regular, rotação em torno de um ponto, reflexão com relação a uma reta e translação de um vetor.

Destacamos a seguir algumas ferramentas do GeoGebra que auxiliam no desenvolvimento do conceito de isometrias no plano.

(1) Translação

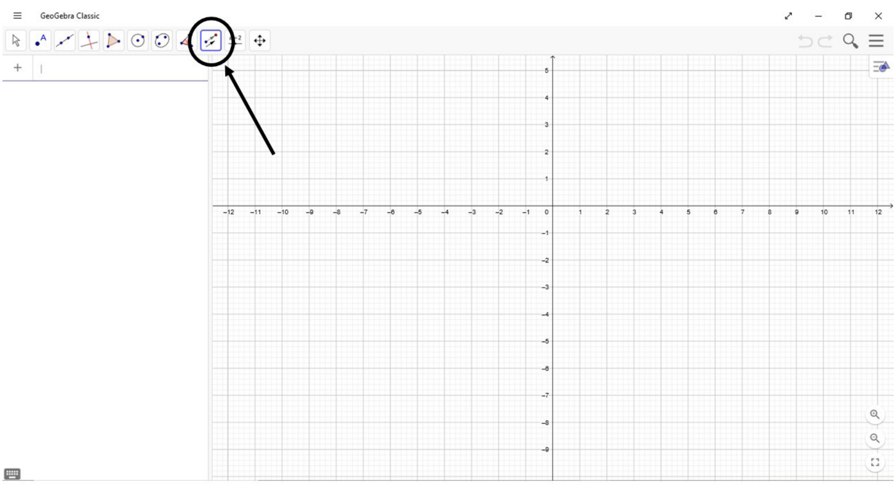
As Figuras 1 e 2 apresentam a ferramenta, cuja função consiste em obter de uma dada uma imagem na qual a figura original dada fica deslocada na medida dada, a qual pode ser representada por um vetor.

Figura 1



Fonte: *Print Screen* do *software* GeoGebra no sistema operacional Windows.

Figura 2

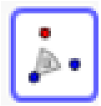


Fonte: *Print Screen* do *software* GeoGebra no sistema operacional Windows

(2) Rotação

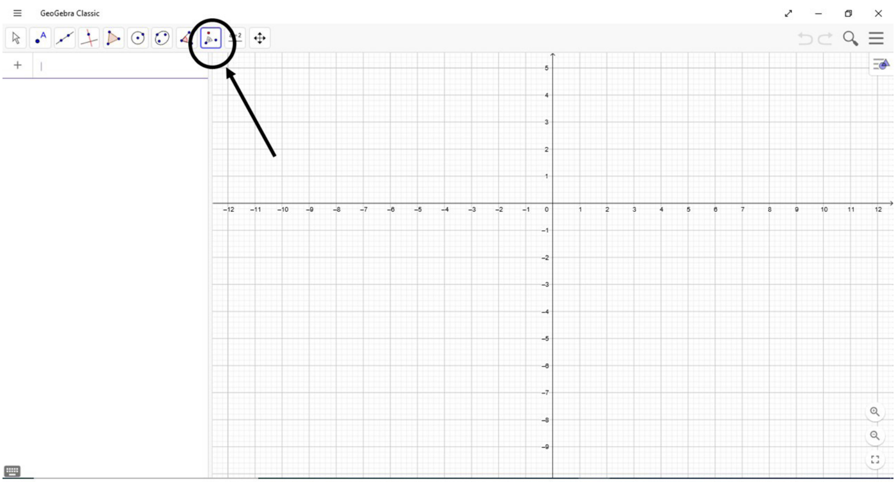
As Figuras 3 e 4 apresentam a ferramenta que por meio de um giro em torno de um determinado ponto fixo, chamado de centro de rotação, obtemos a imagem do objeto rotacionada em torno de um ponto.

Figura 3



Fonte: *Print Screen* do *software* GeoGebra no sistema operacional Windows

Figura 4

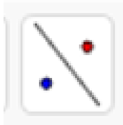


Fonte: *Print Screen* do *software* GeoGebra no sistema operacional Windows

(3) Reflexão

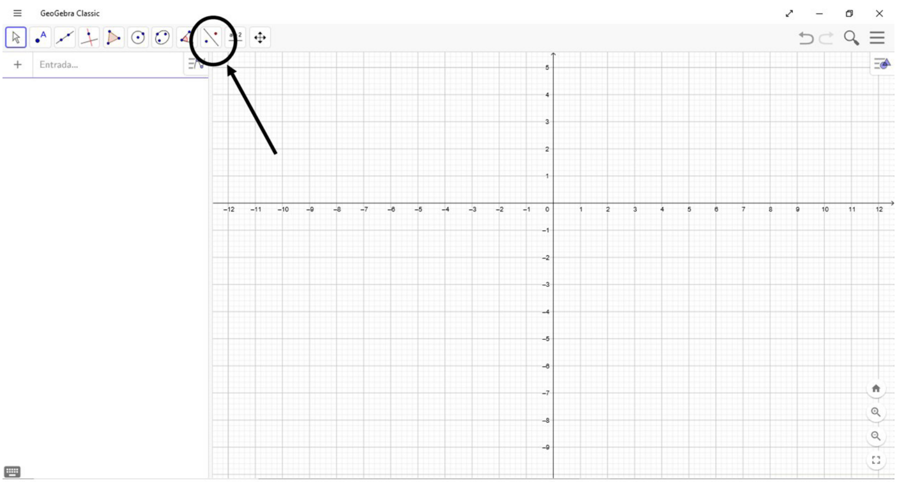
No GeoGebra podemos obter imagens refletidas utilizando as ferramentas: reflexão em relação a uma reta ou reflexão em relação a um ponto. Nas Figuras 5 e 6 é apresentado o ícone cuja função é a reflexão em relação a uma reta. Tal ação faz lembrar o espelho, refletindo a imagem inicialmente desenhada.

Figura 5



Fonte: *Print Screen* do *software* GeoGebra no sistema operacional Windows

Figura 6



Fonte: *Print Screen* do *software* GeoGebra no sistema operacional Windows.

Muitas outras funções do GeoGebra estão relacionadas as isometrias do plano, a título de exemplo, os comandos: Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>], Girar [<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>], entre outros, como mostra Cerqueira (2016).

Modelos de atividades

Cada vez mais o uso de ferramentas tecnológicas se faz necessário, em especial na escola, mudanças significativas na aprendizagem dos nossos alunos vêm acontecendo cada vez mais rápida. É possível verificar as dificuldades dos alunos na compreensão de conceitos geométricos, sobretudo no que se refere às transformações geométricas (CONA, 2017).

No estudo de Geometria, Brasil (1998, p. 51) enfatiza que:

> Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.

Nesse sentido, entende-se que os recursos tecnológicos somados aos didáticos-pedagógicos são capazes de auxiliar ações docentes, que proporcionam uma melhor compreensão do pensamento matemático por parte dos seus alunos, seja na dedução, visualização, criação e/ou abstração de conceitos da matemática (CERQUEIRA, 2016).

Discussão dos resultados

Este capítulo trata-se de um recorte da dissertação — "Isometrias no Plano: Uma proposta de atividade para educação básica com uso do GeoGebra" — escrita pelo discente Luciano de Souza Cerqueira, ex-aluno do Profmat (Mestrado Profissional em Matemática), sob orientação do professor Renato Diniz, docente do Centro de Formação de Professores, da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Com finalidade de auxiliar os (as) professores (as) de Matemática resumimos a seguir quatro atividades propostas por Cerqueira (2016), trazemos como modelos e, recomendamos para detalhes de desenvolvimento, metodologia e execução, ver *in loco* Cerqueira (2016), da página 41 a 48. Essas atividades estão focadas no ensino e na aprendizagem de Geometria, em particular na abordagem das isometrias no plano.

Todas as atividades são destinadas ao oitavo e nono ano do ensino fundamental, sugeridas para serem desenvolvidas no laboratório de informática, com tempo de duração de 1 h 40 min, isto é, duas aulas de 50 minutos, direcionadas e organizadas em sequências didáticas.

Resumo da Atividade 1

Na Atividade 1: “Construção de um polígono utilizando a ferramenta translação”, o autor explora e desenvolve noções primitivas (ponto, reta), conceitos e a construção de objetos matemáticos (segmento de reta, vértice, arestas, polígonos, área e perímetro de figuras planas). A partir execução de ferramentas do GeoGebra como, por exemplo, as relacionadas a translação de figuras planas, o autor vai explorando as propriedades das figuras que se mantêm inalteradas, induzindo ao participante percepções matemáticas, de acordo com seu objetivo.

Resumo da Atividade 2

Na Atividade 2: “Construção de um triângulo conhecendo-se um lado e dois ângulos utilizando a ferramenta rotação”, os alunos são levados a construção de um triângulo, conhecendo-se um dos lados e dois ângulos. O autor destaca, dentre outras coisas, as relações do objeto rotacionado, o centro de rotação e o ângulo de giro, induzindo que os participantes percebam que, por exemplo, ao girar o triângulo construído o mesmo não sofre deformações, ou seja, mantendo suas propriedades iniciais invariantes por essa ação.

Resumo da Atividade 3

Na Atividade 3: “Construção de um triângulo utilizando a reflexão de um ponto em relação a uma reta”, o autor aplica a ferramenta relacionada a reflexão, estudando e explorando conceitos relacionados a mediatriz, ponto médio de um segmento, linguagem de conjuntos. Chamamos atenção ao seguinte fato, a atividade, mesmo que destinada à geometria, acaba trabalhando outros conceitos fora do conteúdo proposto.

Resumo da Atividade 4

Na Atividade 4: “Reflexão com deslizamento”, o autor destaca que esta isometria em sua composição é composta por duas outras isometrias, são elas: a reflexão e a translação. Correlaciona esta atividade com a primeira, trazendo a ideia de movimentos rígidos próprios e impróprios e os relacionando.

Conclusão

A exposição da discussão feita neste trabalho não consideramos como encerrada. As pesquisas em matemática que envolvem a criação, aplicação e análise dos resultados obtidos em sequências didáticas, realizadas e propostas para as aulas de matemática, são oportunidades de apresentar experiências, possibilidades aos docentes que estão diretamente relacionados com a sala de aula. Neste capítulo, buscamos mostrar uma opção para o ensino do conteúdo de isometrias do plano no oitavo e nono ano do ensino fundamental, onde foi possível planejar atividades que pudessem envolver os alunos e o laboratório de informática, com uma proposta de aprendizagem significativa de conceitos matemáticos.

A aplicabilidade do *software* GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem nas aulas de isometrias do plano, através de suas funções e ferramentas, são capazes de demonstrar a eficácia nos resultados, os quais se encontram diretamente relacionados ao conteúdo proposto. Reconhecemos através das leituras realizadas, que alguns fatores podem influenciar e contribuir para a não realização das atividades, por exemplo, dificuldades de acesso à internet e computadores, professores com pouca ou nenhuma familiaridade com as Tecnologias.

Sugerimos aos colegas docentes, que através da leitura deste capítulo, considere a possibilidade de inserir em suas aulas de geometria, especificamente, no estudo de isometrias do plano, o uso do *software* GeoGebra e, assim, obter mais uma forma de explorar o uso do laboratório de informática nas aulas de matemática.

"É necessária a utilização de novos recursos para o ensino e aprendizagem" (DINIZ; LINS, 2010, p. 8). Portanto, usar tecnologia digital e desenvolver atividades com propostas interdisciplinares, ocasionalmente pode exigir mais tempo no planejamento do professor, entretanto os resultados são os melhores possíveis.

Referências

ALMEIDA, M. E. **A formação de recursos humanos em informática educativa propicia a mudança de postura do professor?** *In:* VALENTE, J. A. O professor no Ambiente Logo: formação e atuação. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEMTEC, 1998.

CERQUEIRA, L. S. **Isometrias no plano: uma proposta de atividades para educação básica com uso do GeoGebra**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática). Cruz das Almas, BA, 2016.

CONA, D. C. **Ensino de Isometrias na Educação Básica: uma aplicação didática em sala de aula**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática). São Paulo, SP, JUL, 2017.

DINIZ, R. S.; LINS, A. F. **Devo ou não usar calculadora nas aulas de Matemática?** *In:* Encontro Paraibano de Educação Matemática. Monteiro, PB, nov., 2010.

GOMES, M. F.; OLIVEIRA, A. M. B.; QUEIROZ, N. D. S. **O GeoGebra como ferramenta de Suporte no Processo de Ensino – Aprendizagem Envolvendo Conceitos e Cálculos de Área de Figuras Planas.** *In:* 7ª Jornada Acadêmica 2013. Santa Helena de Goiás, p. 1-5. Nov, 2013.

LOBO, J. S.; BAYER, A. O ensino de geometria no ensino fundamental. **Acta Scientiae**, Canoas, v.6, n.1, jan. /jun. 2004.

MACÊDO, D. F. *et al.* **A Importância da Utilização do Aplicativo GeoGebra em aulas de Matemática: Experiência vivenciada em uma Escola da Educação Básica**. *In:* IV Congresso Nacional de Educação. João Pessoa, PB, nov., 2017.

OLIVEIRA, D. S.; JUSTO, D. A. R. GeoGebra: Facilitando o Aprendizado da Função Afim e Função Quadrática. **Matemática, Mídias Digitais e Didáticas.** Porto Alegre, p. 1-30. 22 de jul., 2015.

RIPPLINGER, H. M. G. **A Simetria nas práticas escolares.** Curitiba, PR, 2006.

Proposta metodológica partindo de construções geométricas

João da Cruz Almeida
Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Introdução

A análise do atual ensino de Geometria, permite a percepção de que muitas vezes o ensino dos conceitos e das propriedades geométricas acontece de forma desassociada das construções; outras vezes quando são abordadas as construções não há um aprofundamento nos conceitos, o que faz o ensino destas ser mais "desenhos" meramente do que instrumentos para visualização de propriedades. Raras vezes percebemos um entrosamento entre as construções, conceitos e propriedades.

Neste sentido é extremamente necessária a oferta de subsídios para que professores possam contar com material de pesquisa para elaboração de aulas, visando o desenvolvimento de atividades que enfoquem as construções geométricas como meio de despertar no aluno o gosto pela Geometria e aptidão para realização das mesmas. Pensando nisto foi elaborada uma proposta metodológica que aborde não somente os conceitos e as construções fundamentais, mas também apresente atividades mais elaboradas, que permita avançar, ir além daquilo que os livros didáticos do Ensino Médio oferecem, já que a literatura em Matemática neste nível abordando construções geométricas ainda é escassa.

Na atual conjuntura da realidade educacional percebe-se que o ensino de Geometria no nível médio quase sempre é focado no abstrato. Assim, é apresentada uma proposta de trabalho que facilite a aprendizagem das construções e, consequentemente, dos conteúdos geométricos. Através dela não se pretende esgotar as possibilidades de se trabalhar com construções geométricas, mas sim de disponibilizar um importante aporte para a elaboração de aulas que visem despertar no estudante o gosto pela Geometria e, mais especificamente, pelas construções geométricas.

De forma geral apresenta-se uma proposta metodológica para o ensino de construções geométricas usando régua e compasso, servindo de subsídio para professores do Ensino Médio na elaboração de aulas de Geometria. Esta proposta foi aplicada em uma turma do 3º ano de Ensino Médio e a partir daí analisou-se se as estratégias utilizadas apresentaram resultados satisfatórios garantindo a aprendizagem.

Especificamente, pretende-se incentivar discussões a respeito do tema abordado e, com isso, analisar o atual ensino de Geometria. Ademais, motivar o desenvolvimento de projetos similares de modo que venham a surgir outros trabalhos e que novos rumos possam ser vislumbrados. É intenção ainda propiciar que a aprendizagem dos conceitos geométricos aconteça de maneira eficaz, através de aulas que associem construções geométricas, conceitos e propriedades. Não obstante, objetiva-se aprimorar o raciocínio lógico do estudante auxiliando-o na maneira de pensar e agir ante a situações propostas, no desenvolvimento de sua autonomia e na busca por soluções nos acontecimentos do seu cotidiano.

Contextualização do ensino de geometria

Para melhor compreensão da situação atual do ensino de Geometria nas escolas públicas brasileiras faz-se necessário uma análise desde o início do século XX, momento em que a educação brasileira começou a ser organizada de maneira mais criteriosa considerando a sua gratuidade e o acesso, até a presente data.

Até a década de 20 o ensino de Matemática nos cursos secundários era realizado de forma fragmentada nos ramos de Álgebra, Aritmética e Geometria[1]. Para Dassie e Rocha (2003) a criação da disciplina Matemática ocorre no final dessa década, inicialmente por proposta de Euclides Roxo[2] apenas para o Colégio Pedro II e, em seguida, com a Reforma Francisco Campos, ocorrida em 1931, tal mudança é estendida para todos os colégios de Nível secundário. Além da junção dos conteúdos de Aritmética, Álgebra e Geometria, a reforma também propunha o emprego de um método heurístico, segundo o qual "o ensino se fará, assim, pela solicitação constante da atividade do aluno (método heurístico), de quem se procurará fazer um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos" (ROCHA, 2001, p. 210). A junção dos três ramos da Matemática citados acima em um único componente contribuiu no sentido de que todo aluno de escola pública teria acesso ao conhecimento inerente a tal componente.

Outro destaque da Reforma Francisco Campos foi o Decreto nº 19.890 de 18 de abril de 1931, que inseriu a disciplina Desenho Geométrico nas cinco séries do Curso Fundamental durando até 1971, quando da promulgação da Lei 5.692. Destaca-se também, no sentido de oferecer educação a todos, a Constituição de 1934.

Entre os anos de 1942 a 1946 foi publicada uma série de leis, que compunham a Reforma Capanema. Segundo Gaspar (2014) a disciplina de Desenho Geométrico foi organizada considerando não só os conteúdos, como também a metodologia. Desta forma a referida disciplina foi elevada a uma posição privilegiada, pois além de colocá-la presente em todas as séries, também incentivava as construções geométricas com o uso de instrumentos.

Na década de 50 temos dois acontecimentos importantíssimos para o ensino de Desenho Geométrico: primeiro a Portaria Ministerial nº 966 de 2 de outubro de 1951, que enfatiza o ensino de Desenho Geométrico como fundamental para o ensino de Matemática; segundo, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) que foi desencadeado

1 - As aulas de Geometria também incluíam conteúdos de Trigonometria.
2 - Euclides Roxo (1890-1950) foi diretor do externato do Colégio Pedro II.

a partir do Primeiro Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática no Curso Secundário, em 1955.

O MMM foi um dos grandes responsáveis por significativas mudanças no ensino de Matemática, entre as quais destaca-se a redução ou exclusão do ensino de Geometria nas escolas de ensino básico; os livros didáticos de Matemática passam a abordar os conteúdos de forma mais restrita sem demonstrações. Costa (1982) afirma que essa "inferioridade" da Geometria já era apresentada nos livros didáticos antes da década de 50, sendo agravada pelo MMM principalmente nas escolas públicas.

Para Gomes (2007) o MMM fez com que houvesse uma excessiva ênfase ao ensino da Álgebra, colocando os outros campos da Matemática, como a Geometria por exemplo, em segundo plano. Outro fato que contribuiu significativamente para a quase exclusão do ensino de Desenho Geométrico das escolas públicas no Brasil foi a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1961 que estabeleceu em seu artigo 45[3]:

> Art. 45. No ciclo ginasial serão ministradas nove disciplinas.
> Parágrafo único. Além das práticas educativas, não poderão ser ministradas menos de 5 nem mais de 7 disciplinas em cada série, das quais uma ou duas devem ser optativas e de livre escolha do estabelecimento para cada curso. (LDB 4.024, 1961 artigo 45, § único).

Em 1971, com a reformulação da LDB (Lei nº 5692, de 11 de agosto de 1971), criou-se um núcleo comum com disciplinas obrigatórias e outro núcleo com disciplinas facultativas chamado de parte diversificada. Assim, o Desenho Geométrico saiu do currículo das escolas que passaram a ter na parte diversificada Educação Artística em todas as séries, o que ocasionou o fim das construções geométricas em muitas escolas.

3 - Revogado pela lei no 5.692 de 1971.

No final do século XX, começam a surgir ações positivas que auxiliam no resgate do ensino das construções nos Ensinos Fundamental e Médio. Com destaque para o lançamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997. Em 1998, são publicados os PCNs de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, que propõem retomar o uso de régua e compasso nas construções.

O ensino de Geometria não deve ser baseado apenas em aulas expositivas com a apresentação de conceitos e propriedades sem a manipulação, sem a construção de figuras que permitam ao educando a visualização daquilo que está sendo abordado. A aquisição de regras por parte do aluno sem associação, sem uma aplicação prática, não permitirá a escola o alcance de seus objetivos. É necessário que as propostas metodológicas se baseiem na manipulação e na construção, porém infelizmente as escolas em sua maioria ainda não fazem isso:

> [...] o que temos percebido é que, na maioria das escolas, o ensino se baseia muito mais na manipulação sintática de símbolos e regras do que no significado dos mesmos. Muitos alunos cometem vários erros por não conseguirem compreender a lógica do raciocínio ou, ainda, por não conseguirem manipular os símbolos com determinadas regras (MORELATTI; SOUZA, 2006, p. 1).

As construções geométricas são instrumentos essenciais para o aprendizado de Geometria e de outros campos da Matemática. Daí a necessidade de propostas de trabalho que visem oferecer subsídios de qualidade, e no nível acessível para os estudantes do Ensino Médio; que permitam ao professor da Educação Básica elaborar e ministrar aulas propiciando ao aluno a aquisição de conhecimentos fundamentais neste campo. Ressaltando que o objetivo não é só aprender os conteúdos abordados, que por si só já era o suficiente, mas também que esta metodologia contribua para adquirir outros conhecimentos no campo da Matemática.

Aspectos metodológicos

Na prática pedagógica em escola pública presencia-se situações que revelam o pouco ou nenhum conhecimento de alunos do Ensino Médio, e até mesmo de concluintes, a respeito das construções geométricas. Este fato foi uma das principais motivações para a realização deste trabalho. Assim, surgiu a preocupação em elaborar um material para ser usado nas aulas de Geometria que propiciasse a aquisição de habilidades para as construções.

Desta forma, esta pesquisa é baseada na aplicação de um projeto que consiste numa abordagem de construções geométricas simples e outras mais elaboradas, usando régua e compasso. Apresenta uma metodologia diferente daquela comumente usada nas aulas de Geometria, baseada na aplicação de construções, onde o aluno possa ir adquirindo autonomia para elaborar os passos e assim propiciar formas de conduzi-lo a uma aprendizagem significativa.

Esta é uma pesquisa exploratória, pois “[...]tem como objetivo proporcionar mais familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipótese.” (GIL, 2002, p. 41). Considerando que reúne aspectos qualitativos e quantitativos na coleta e na análise de dados, ela é de natureza quali-quantitativa, pois envolve dados numéricos, estatísticos e informações textuais. Neste trabalho, consideraram-se os aspectos qualitativos e também os quantitativos, a fim de se obter uma análise mais fiel dos testes e situações observadas, pois “o estudo quantitativo pode gerar questões para serem aprofundadas qualitativamente, e vice-versa” (MINAYO, 1993, p. 9).

Realizando o projeto

Na primeira etapa foi feito o mapeamento dos discentes interessados em participar do projeto, sendo que as aulas ocorreram no turno oposto. Inicialmente a pretensão era aplicar o projeto em uma turma de 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Governador João Durval Carneiro, no município de São Felipe, na Bahia, porém devido ao calendário escolar estadual estar incompatível com o tempo do projeto e pela facilidade em montar um grupo de alunos, o projeto foi aplicado com alunos do 3º ano da escola supracitada. No primeiro momento tinham 30 alunos inscritos dos quais apenas 12 iniciaram e participaram efetivamente do projeto.

Na etapa seguinte foi feita uma sondagem para verificar quais conceitos prévios os alunos possuíam. Para isso foram utilizados exercícios simples que visaram analisar o conhecimento de conceitos, propriedades e processos de construções relacionados aos conteúdos específicos: conceitos primitivos, posições relativas de duas retas, triângulos, pontos notáveis dos triângulos, quadrados e círculos.

Na terceira etapa realizou-se a análise do teste de sondagem identificando o conhecimento dos estudantes, o que proporcionou um melhor direcionamento do projeto.

Em outra etapa foram elaboradas atividades que abordaram construções fundamentais; em seguida, a partir da observação do primeiro momento, foram feitas outras construções mais complexas visando o aprimoramento dos conhecimentos já observados e também a ampliação destes. Para isso foram usadas construções geométricas que permitissem aos alunos visualizarem propriedades e também a fixação de conceitos e definições. As atividades foram desenvolvidas em 7 encontros com duração de 2 aulas de 50 minutos, uma vez por semana.

Na penúltima etapa, após as aulas, aplicou-se um segundo teste com questões semelhantes às do anterior, porém modificando os exercícios para que a análise dos resultados não fosse comprometida, uma vez que os alunos relatavam durante as aulas quando era abordada uma construção semelhante à solicitada no primeiro questionário.

Na sexta etapa foi realizada a sistematização dos dados analisados. Nas construções geométricas foram usados o compasso e a régua. No caso da régua, ela foi usada exclusivamente para traçar retas conhecendo-se dois pontos e o compasso para traçar um círculo conhecendo-se seu centro e o raio definido pelo comprimento de um segmento conhecido.

Análise geral da pesquisa

Durante a aplicação do projeto percebeu-se que os alunos no transcorrer dos estudos nos Ensinos Fundamental e Médio nunca tiveram aula de construções usando régua e compasso, o que dificultou as aulas no início, pois foi necessário explicar a maneira correta de usar os instrumentos e, ainda assim, nas primeiras construções precisou mostrar como fazer.

Um fato que ficou evidente na aplicação do teste de sondagem e durante as atividades foi a dificuldade de compreender as definições. Alguns alunos sabiam as definições, na realidade decoraram, mas não compreendiam, não associavam ao desenho. Nas primeiras aulas essa falta de proximidade com os conteúdos atrapalhou o desenvolvimento das atividades, pois era preciso abordar os conceitos tomando cuidado para não serem apenas memorizados. Contudo, a proposta não era apresentar as definições, mas permitir ao educando a elaboração dos conceitos.

Dentre as inquietações surgidas no decorrer do projeto merece destaque a falta dos conhecimentos prévios. A maioria dos alunos esqueceu muitos conteúdos básicos trabalhados no Ensino Fundamental. Vale destacar que todos os estudantes envolvidos neste projeto tiveram a disciplina Geometria[4] no ano anterior, porém os conteúdos trabalhados pelos professores não foram iguais, o que levou a iniciar com os conceitos primitivos.

Outro fator preocupante é a falta de motivação de participar das aulas da disciplina de Geometria ou nas aulas desta dentro da disciplina de Matemática, que está associada à metodologia usada nas aulas da disciplina. A introdução da primeira aula, usando objetos do cotidiano, ajudou a motivá-los e a mostrar a utilidade da Geometria na vida.

Apesar da preocupação inicial e da mudança no planejamento por conta do ritmo das construções, houve uma mudança de visão da Geometria ocorrida em alguns educandos que no início do projeto achavam difícil compreender os passos das construções e no decorrer perceberam que era possível realizá-las. Outra modificação foi a compreensão dos conceitos. No transcorrer das aulas ficou evidente que os alunos aprendiam melhor quando participavam da elaboração das definições, sejam através de questionamentos ou das construções.

Construções

A partir daqui são descritos os passos de cada construção. O par de figuras em cada item retrata o desenho inicial (figura à esquerda) e o produto final (figura à direita).

Construção 1

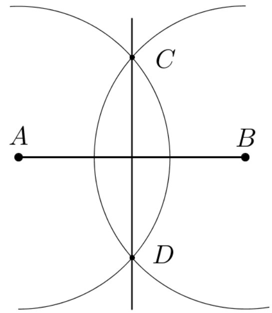
Essa construção objetiva traçar a mediatriz de um segmento de reta.

4 - A Escola oferece a disciplina de Geometria apenas no 2º ano do Ensino Médio. Ela compõe a parte diversificada do currículo, vinculada ao eixo de Matemática e ao de Ciências Naturais. A carga horária é de uma aula semanal.

Figura 1 - Segmento *AB*.

Fonte: Almeida (2014, p. 53).

Figura 2 - Mediatriz de $\overline{AB}$.



Fonte: Almeida (2014, p. 53).

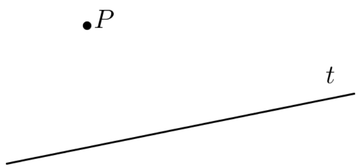
1º passo: com o auxílio de uma régua traça-se um segmento *AB* qualquer, conforme Figura 1;
2º passo: com o compasso, centro em *A* e abertura maior que a metade de $\overline{AB}$, traça-se um círculo;
3º passo: realiza-se o procedimento anterior, porém agora com o centro em *B* ;
4º passo: marcam-se as intercessões dos círculos, com os pontos *C* e *D* ;
5º passo: traça-se a reta $\overleftrightarrow{CD}$, que é a mediatriz do segmento *AB*, como se vê na Figura 2.

Observa-se que pelos círculos traçados tem-se que $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD}$, portanto os pontos *C* e *D* equidistam dos pontos *A* e *B* o que garante que eles pertencem a mediatriz de acordo com a definição desta.

Construção 2

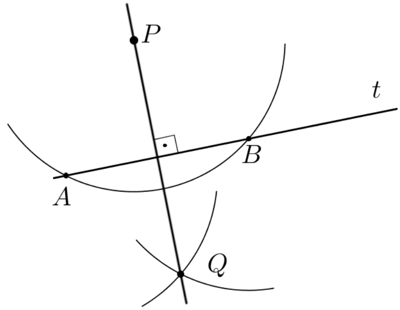
Essa construção objetiva traçar uma perpendicular à uma reta dada passando por um ponto também dado.

Figura 3 - Reta *t* e ponto *P*.



Fonte: Almeida (2014, p. 53).

Figura 4 - $\overleftrightarrow{PQ} \perp t$.



Fonte: Almeida (2014, p. 53).

1º passo: traça-se a reta *t* e considera-se um ponto *P* fora da reta, como se vê na Figura 3;
2º passo: com o centro do compasso em *P* traça-se um círculo qualquer interceptando a reta *t* nos pontos *A* e *B*;
3º passo: com o mesmo raio traçam-se dois círculos com centros nos pontos *A* e *B*, respectivamente, determinando em uma das interseções destes círculos o ponto Q;
4º passo: traça-se a reta ligando os pontos *P* e *Q*, conforme a Figura 4, que é perpendicular à reta *t*.

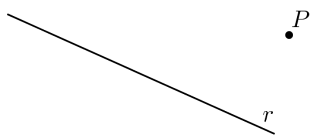
Note-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$, pelo primeiro círculo traçado e $\overline{QA} = \overline{QB}$, pelo segundo.

Daí *P* e *Q* são pontos equidistantes de *A* e *B*. Logo a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz do segmento AB, o que garante que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Construção 3

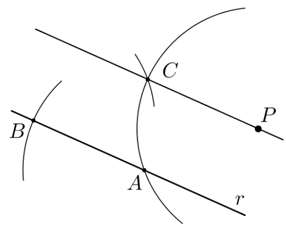
Essa construção objetiva traçar uma paralela à uma reta dada passando por um ponto dado fora desta reta.

Figura 5 - Reta *r* e ponto *P*.



Fonte: Almeida (2014, p. 54).

Figura 6 - $\overleftrightarrow{PC} \parallel r$.



Fonte: Almeida (2014, p. 54).

1º passo: com o auxílio de uma régua traça-se uma reta *r* qualquer e marca-se um ponto *P* fora da reta dada, de acordo com a Figura 5;

2º passo: com o compasso, centro em *P* traça-se um círculo que intersecta a reta *r* em *A* ;

3º passo: com o centro em *A* e o mesmo raio, traça-se outro círculo que intersecta a reta *r* em *B* ;

4º passo: com o centro em *B* e o mesmo raio, traça-se um terceiro círculo que intersecta o primeiro no ponto *C*;

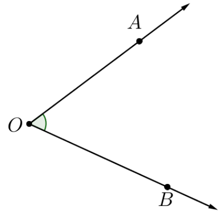
5º passo: traça-se, portanto, a reta $\overleftrightarrow{PC}$, que é a reta paralela à reta *r* passando por *P*, como se vê na Figura 6.

Note-se que $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CP}$, pois o raio é o mesmo. Daí a reta $\overleftrightarrow{PC}$ é paralela à reta *r*.

Construção 4

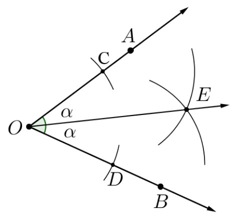
Essa construção objetiva traçar a bissetriz de um ângulo dado.

Figura 7 - $A\hat{O}B$.



Fonte: Almeida (2014, p. 55).

Figura 8 - $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$.



Fonte: Almeida (2014, p. 55).

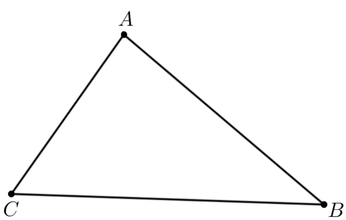
1º passo: traça-se o ângulo $A\hat{O}B$, conforme se vê na Figura 7;
2º passo: com o centro do compasso no vértice *0* do ângulo e um raio qualquer, traça-se um círculo e marcam-se as interseções com os lados, diga-se pontos *C* e *D* respectivamente;
3º passo: com o centro no ponto *C* e, em seguida em *D*, traçam-se dois círculos de mesmo raio que se intersectam no ponto *E* ;
4º passo: unindo o ponto *E* ao vértice do ângulo tem-se a bissetriz procurada, vide Figura 8.

Note-se que $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{CE} = \overline{DE}$, ou seja, os pontos *0* e *E* equi distam de *C* e *D*, o que garante que $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Construção 5

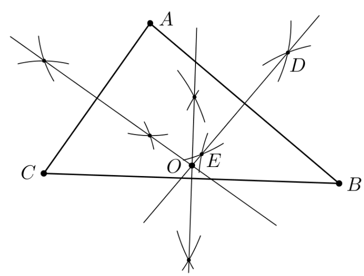
Essa construção objetiva traçar as mediatrizes de um triângulo e encontrar seu circuncentro.

Figura 9 $\triangle ABC$.



Fonte: Almeida (2014, p. 55).

Figura 10 – *0* é o circuncentro do $\triangle ABC$.



Fonte: Almeida (2014, p. 55).

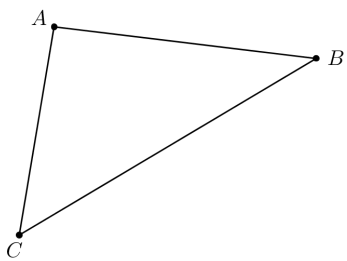
1º passo: desenha-se um triângulo *ABC* qualquer, conforme Figura 9;
2º passo: traça-se a mediatriz do lado *AB*, conforme a construção (1);
3º passo: realiza-se o mesmo procedimento com os lados *BC* e *CA*, respectivamente;
4º passo: marca-se o ponto de interseção das mediatrizes, ponto *O*, que é o circuncentro do triângulo *ABC*, como se vê na Figura 10.

Note-se que apenas duas mediatrizes são suficientes para encontrar o circuncentro.

Construção 6

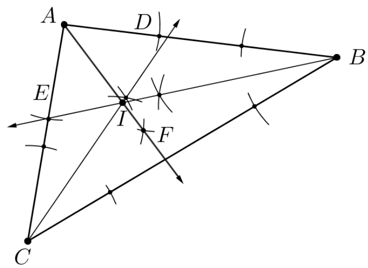
Essa construção objetiva traçar as bissetrizes de um triângulo e encontrar seu incentro.

Figura 11 - $\triangle ABC$.



Fonte: Almeida (2014, p. 56).

Figura 12 - *I* é o incentro do $\triangle ABC$.



Fonte: Almeida (2014, p. 56).

1º passo: desenha-se um triângulo *ABC* qualquer, de acordo com a Figura 11;
2º passo: traça-se a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, conforme construção (4);
3º passo: realiza-se o mesmo procedimento com os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ respectivamente;
4º passo: marca-se o ponto de interseção das bissetrizes, ponto I, que é o incentro do triângulo, como se observa na Figura 12.

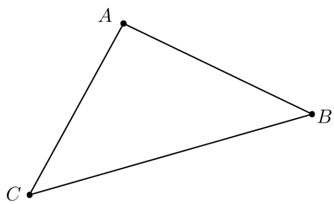
Note-se que apenas duas bissetrizes são suficientes para encontrar o incentro.

Construção 7

Essa construção objetiva traçar as medianas do triângulo e encontrar o baricentro.

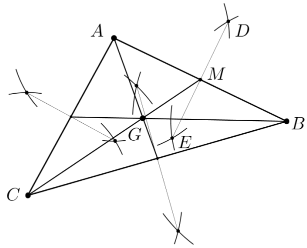
.

Figura 13 - $\triangle ABC$.



Fonte: Almeida (2014, p. 56).

Figura 14 – *G* é o baricentro do $\triangle ABC$.



Fonte: Almeida (2014, p. 56).

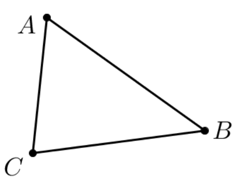
1º passo: desenha-se um triângulo *ABC* qualquer, conforme se vê na Figura 13;
2º passo: encontra-se o ponto médio, diga-se *M* do lado *AB*. Para isso traça-se a mediatriz do lado *AB*, conforme construção (1);
3º passo: traça-se o segmento *CM*, que é a mediana relativa ao lado *AB*;
4º passo: realiza-se o mesmo procedimento para encontrar as medianas relativas ao lado *BC* e *CA*, respectivamente;
5º passo: marca-se o ponto de interseção das medianas, diga-se *G*, que é o baricentro do triângulo *ABC*, de acordo com a Figura 14.

Note-se que duas medianas são suficientes para encontrar o baricentro.

Construção 8

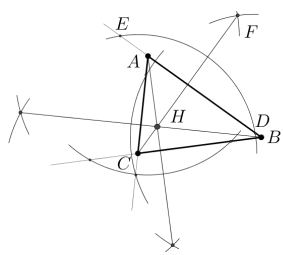
Essa construção objetiva traçar as alturas relativas aos lados do triângulo e encontrar seu ortocentro.

Figura 15 - $\triangle ABC$.



Fonte: Almeida (2014, p. 57).

Figura 16 – *H* é o ortocentro do $\triangle ABC$.



Fonte: Almeida (2014, p. 57).

1º passo: desenha-se um triângulo *ABC* qualquer, como se vê na Figura 15;
2º passo: traça-se a altura relativa ao lado *AB*, ou seja, traça-se a reta perpendicular ao lado *AB* passando pelo vértice *C*. Para isso segue-se o procedimento descrito na construção (2);
3º passo: seguindo os passos da construção (2), traçam-se as alturas relativas aos lados *BC* e *CA*, respectivamente;
4º passo: marca-se a intercessão das alturas, ponto *H*, que é o ortocentro do triângulo *ABC*, conforme se vê na Figura 16.

Note-se que duas alturas são suficientes para encontrar o ortocentro.

Propostas de aulas

Com o intuito de auxiliar o processo de ensino-aprendizagem das construções geométricas, são apresentadas nesta seção algumas propostas de aulas vivenciadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho com os estudantes.

Aula 1

Conteúdos abordados: Conceitos primitivos, semirreta, segmento de reta, definição e construção da mediatriz de um segmento; posições relativas de duas retas coplanares;

Objetivos: Identificar os conceitos fundamentais, reconhecendo-os como parte essencial para a estrutura da geometria; compreender os fundamentos adotados nas construções geométricas usando régua e compasso; classificar retas coplanares, ligando-as às situações do cotidiano; definir e traçar mediatriz de um segmento de reta.

Descrição das atividades: Nesta primeira atividade foram apresentadas as noções primitivas. Para isso inicialmente pediu-se que os alunos dessem exemplos que dão ideia destes entes; a seguir foram apresentadas as figuras e suas representações no quadro, fornecendo mais exemplos. Usando o mesmo procedimento para reta e semirreta, e só depois disso apresentaram-se as definições das mesmas.

Nesta aula foram identificadas as posições de duas retas coplanares. Para isso foram apresentadas algumas figuras e perguntado como são classificadas tais retas. A partir das respostas foram dadas as definições e solicitados alguns exemplos do cotidiano. Apresentou-se também a definição de ponto médio. Para isso primeiro foi questionado aos alunos para que depois partissem para a construção da definição. Por último, introduziu-se o conceito de mediatriz, inicialmente apresentando figuras e depois realizando a construção.

Foi explicado como utilizar os instrumentos. A régua utilizada não deveria ser graduada, caso fosse não poderiam usá-la para medir segmentos. Foi ensinado o local adequado para segurar o compasso, como também que as linhas auxiliares ao desenho deviam ser traçadas de forma leve para não confundir o desenho inicial com o que estava sendo buscado na atividade.

Por fim foram apresentados os passos e, com os alunos, feita a construção 1. À medida que ia sendo realizada a primeira construção no quadro, os estudantes deveriam ir realizando em seu caderno e sempre que necessário auxiliava-se o discente. Com a mediatriz já traçada afirmou-se que a mesma é equidistante das extremidades do segmento, pois foi usado o mesmo arco.

Aula 2

Conteúdo abordado: Posições relativas de duas retas coplanares; construção de reta paralela e reta perpendicular à uma reta dada passando por um ponto também dado.

Objetivos: Classificar retas coplanares, ligando-as às situações do cotidiano; construir reta paralela e reta perpendicular à uma reta dada, compreendendo os passos que justificam a construção.

Descrição das atividades: Partiu-se de uma breve revisão dos conteúdos apresentados na aula anterior e depois solicitado que fizessem a construção 1 sozinhos. Em seguida, apresentaram-se os passos para a construção 2: traçar uma reta perpendicular à uma reta dada passando por ponto também dado (neste primeiro momento o ponto será não pertencente à reta). Seguiu-se a mesma metodologia adotada na aula anterior. Durante a construção foi evidenciado que para traçar a perpendicular, inicialmente encontram-se dois pontos pertencentes à reta, equidistantes do ponto dado. Daí traça-se a mediatriz do segmento formado por estes pontos, o que garante que é perpendicular à reta dada e passa exatamente no ponto fornecido.

Em seguida foi pedido que traçassem uma perpendicular à uma reta dada passando por um ponto dado pertencente à reta. Esperava-se que realizassem a construção usando o mesmo procedimento anterior, contudo sem apresentar os passos, mas questionando-os sobre o que fazer na sequência.

Depois passou-se para a construção 3: traçar uma paralela a uma reta dada passando por um ponto dado. Inicialmente foi mostrado para o aluno que o ponto dado não era pertencente à reta, pois se o fosse, as retas seriam coincidentes. A construção também foi feita em conjunto. Ressaltou-se o fato de usar equidistância para encontrar a paralela, fato claramente percebido quando se usa o mesmo arco.

Aula 3

Conteúdo abordado: Ângulos, bissetrizes de ângulos, triângulos e quadrados.

Objetivos: Construir a bissetriz de um ângulo, percebendo as propriedades que justificam a construção; reconhecer triângulos e quadrados, bem como seus elementos e propriedades; compreender os passos adotados para o transporte de segmentos e sua importância na construção de triângulos e quadrados quando conhecemos os lados.

Descrição das atividades: Iniciou-se mostrando desenhos de bissetrizes de ângulos e citando alguns casos nos quais ela pode ser encontrada, como por exemplo, na diagonal do retângulo. A seguir definiu-se bissetriz e foi apresentada a construção 4, traçar a bissetriz de um ângulo dado. Desta vez deixou-se que fizessem a construção sozinhos, interferindo apenas quando necessário ou solicitado, para que adquirissem confiança e autonomia para realizar as construções. Ao fim do processo destacou-se o fato do último ponto encontrado (o que será ligado ao vértice do ângulo) ser equidistante dos lados do ângulo, justificando que a semirreta traçada é, de fato, a bissetriz.

Indagou-se sobre o que é um triângulo e foi solicitado que desenhassem. Algumas figuras com formatos variados foram exibidas e foi perguntado se todas eram triângulos. A partir das respostas deu-se a definição. A mesma metodologia foi usada para apresentar a definição de quadrado, entretanto usando as figuras em diferentes posições para evitar falsas interpretações, tais como: só é quadrado quando o lado está na horizontal e quando os lados aparecem "inclinados" não são.

Foram apresentadas as seguintes atividades: 1 - Como construir um triângulo conhecendo seus lados? 2 - Como construir um quadrado dado que sabemos quem é seu lado? Ao término verificaram-se quais os procedimentos adotados e entre aqueles que construíram analisou-se qual(is) o(s) procedimento(s) adequado(s) e de maneira conjunta foi estabelecido o roteiro. Na primeira destacou-se o transporte de segmentos, ainda não explorado. Já na segunda enfatizou-se a construção de uma perpendicular passando por um ponto dado sobre à reta. Ressaltando a inviabilidade ou dificuldade de tais construções utilizando apenas a régua, ainda que graduada.

Aula 4

Conteúdo abordado: Mediatriz e bissetriz de triângulos; circuncentro e incentro.

Objetivos: Conceituar e identificar mediatriz e bissetriz de triângulos; definir circuncentro e incentro; aplicar os conhecimentos adquiridos sobre construções geométricas para traçar as mediatrizes (bissetrizes) e encontrar o circuncentro (incentro), relacionando os passos realizados às propriedades que justificam as construções.

Descrição das atividades: Inicialmente foi pedido que conceituassem mediatriz, depois foram questionados sobre as mediatrizes de um triângulo. A partir das respostas foram mostradas figuras de triângulos com as mediatrizes traçadas, provocando a elaboração da definição sem a necessidade inicial de escrevê-la. Após a compreensão de mediatriz de um triângulo, passou-se para a construção 5, traçar as mediatrizes de um triângulo, sem afirmar que as mediatrizes se encontram num mesmo ponto. Deixando que construíssem sozinhos e ao término foram questionados se em todas as construções as mediatrizes se encontraram em um único ponto. Perceberam que estes elementos sempre se interceptam em um ponto e, assim, definiu-se circuncentro. Destacou-se que duas mediatrizes são suficientes para encontrar o circuncentro, que pode estar no interior do triângulo (triângulo acutângulo), no exterior (triângulo obtusângulo) ou sobre o lado (triângulo retângulo).

O procedimento anterior foi adotado na construção 6, traçar as bissetrizes de um triângulo, considerando agora a definição de bissetrizes de um ângulo. Ao final da construção foi destacado que a intercessão entre as bissetrizes é chamada de incentro, que o mesmo é sempre interior ao triângulo e que apenas duas bissetrizes são suficientes para encontrá-lo.

Aula 5

Conteúdo abordado: Mediana e altura de triângulos; baricentro e ortocentro.

Objetivos: Definir e identificar mediana e altura de triângulos; definir baricentro e ortocentro; encontrar o baricentro (ortocentro) de um triângulo, a partir da construção com régua e compasso, estabelecendo relação entre o procedimento adotado com as propriedades referentes ao ponto notável.

Descrição das atividades: Começou-se a aula apresentando alguns triângulos com suas respectivas medianas e dando a definição das mesmas. Em seguida passou-se para a construção 7: traçar as medianas de um triângulo. Incitando os alunos a perceberem, a partir da definição, que para construir as medianas bastava traçar a mediatriz dos lados para achar o ponto médio deste e em seguida uni-lo ao vértice oposto. Durante a construção alguns deles conseguiram visualizar que estes elementos se intersectam em um único ponto e que apenas duas eram suficientes para encontrá-lo. No final identificou-se o baricentro definindo-o, destacando que sempre estará no interior do triângulo.

Após este processo, os educandos foram indagados o que eles associavam ao ouvir a palavra altura e o que é a altura de um triângulo. Em seguida mostraram-se triângulos com as respectivas alturas traçadas apresentando a definição desta. Passou-se para a construção 8: traçar as alturas relativas aos lados do triângulo. Novamente provocaram-se situações para que percebessem que esta construção se baseava em traçar uma perpendicular ao lado do triângulo passando pelo vértice oposto. Foram mostrados os passos àqueles que apresentaram dificuldades. Alguns estudantes comentaram sobre o fato de a altura traçada estar no exterior do triângulo. Alguns concluíram também que as três alturas se interceptaram no mesmo ponto e que apenas duas eram necessárias para encontrar este ponto. A partir destas conclusões, definiu-se ortocentro destacando que tal ponto pode estar no interior do triângulo (triângulo acutângulo), no exterior (triângulo obtusângulo) ou sobre o vértice (triângulo retângulo).

Conclusão

A proposta apresentada neste trabalho teve por objetivo principal provocar mudanças na atual forma de ensino das construções geométricas nas escolas públicas. Ao propiciar condições do aluno relacionar as construções aos conceitos, ao instigá-los a descoberta, o aprendizado acontece de forma significativa. É importante também a utilização de metodologias que permitam uma relação entre o conhecimento prévio e os conteúdos estudados.

O uso de materiais de desenho é um grande aliado para o aprendizado de conceitos e propriedades geométricas. Além se ser motivador para o educando, ainda que alguns tenham dificuldades no início, a ação de construir propicia uma aprendizagem mais prazerosa e o envolvimento do estudante nas atividades é maior, pois ele percebe a relação entre construção e definição.

Não é pretensão que este material seja o único utilizado na sala de aula, nem deve, mas que possa servir como subsídio ou como fonte de pesquisa, para auxiliar os professores que ministram aulas de Desenho Geométrico na elaboração das atividades. Ressalte-se que ele não deve ser utilizado como um "roteiro pronto", no entanto, deve ser visto como sugestão de um caminho. Cabe ao professor a análise da melhor metodologia a ser utilizada, considerando a realidade da turma, conhecimento prévio, habilidades, entre outros. Não se trata de apenas abordar as construções, como se fosse o único objetivo, contudo elas são um caminho para a aprendizagem da teoria, para a abordagem das definições e entendimento das propriedades.

Ao aproximar o educando do processo das construções estamos avizinhando-os dos conceitos, o que evita definições decoradas e não aprendidas. Este processo faz com que o sujeito envolvido não seja apenas observador, mas protagonista na elaboração e execução dos passos que conduzem aos resultados.

A presente proposta pode ser aplicada em turmas do Ensino Médio, do 1º ao 3º ano, todavia é preciso analisar o conhecimento dos estudantes antes de aplicá-la. O teste de sondagem constitui um valioso instrumento para tal fim.

O trabalho com construções geométricas pode e deve ser desenvolvido em todos os anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e no Ensino Médio. Ainda que não haja a disciplina Desenho Geométrico, a abordagem das construções geométricas pode ser feita na disciplina de Geometria ou nas aulas de Matemática destinadas aos conteúdos geométricos. Quanto mais cedo o aluno tiver contato com os instrumentos, maior será a facilidade para abordar construções mais complexas. Entretanto, a abordagem das construções só fará sentido se propiciar a aprendizagem dos conceitos e propriedades, para não correr o risco de serem ministradas aulas de “desenhos”. Portanto, não se pode pensar na aplicação deste projeto de maneira desassociada dos conteúdos planejados para a série, mas de forma concomitante.

Referências

ALMEIDA, J. C. **Construções geométricas: uma proposta metodológica baseada em uma experiência com um grupo de alunos do Ensino Médio**. 2014. 81 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática – 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF, v.1,1997.

BRASIL. Lei n. 4.024, de 20 de dezembro de 1961. **Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Brasília, DF: Senado

Federal, 1961. Disponível em http://presrepublica.jusbrasil. com. br/legislacao/129047/lei-de-diretrizes-ebase-de-1961-lei-4024-61. Acesso em: 26 fev. 2014.

COSTA, M. D. O desenho básico na área tecnológica. In: CONGRESSO NACIONAL DE DESENHO, 2., 1981, Florianópolis. **Anais. [...].** Florianópolis: UFSC, 1982. p. 89-93.

DASSIE, B. A.; ROCHA, José Lourenço da. O ensino de matemática no Brasil nas primeiras décadas do século XX. **Caderno Dá Licença**, n. 4, ano 5. Niterói: Universidade Federal Fluminense, dez 2003. Disponível em: http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume4/da_Licena_Bruno.pdf. Acesso em: 16 fev. 2014.

GASPAR, J. A. S. **O Desenho Escolar no Rio de Janeiro: uma história de 1890 a 1964**. 2014. 156 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra. Vassouras, 2014.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 176 p.

GOMES, M. L. M. **O ensino da Geometria no Brasil nas últimas décadas: da ausência a presença com prevalência das abordagens experimentais.** *In:* I Seminário de Ensino de Geometria, 2007, Ouro Preto.

MINAYO, M. C. S. **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. 21. ed. Petrópolis: Vozes, 2002. 81 p.

MINAYO, M. C. S.; SANCHES, O. **Quantitativo-qualitativo: oposição ou complementaridade?** Caderno Saúde Pública, Rio de Janeiro, v. 9, n. 3, p. 239-262, jul./set. 1993.

MORELATTI, M. R. M.; SOUZA, L. H. G. Aprendizagem de conceitos geométricos pelo futuro professor das séries iniciais do Ensino fundamental e as novas tecnologias. **Educação em Revista**., Curitiba, no. 28, 2006. Disponível em: http://www.scielo.br/

scielo.php?script=sciarttex&pid=S0104-40602006000200017&Ing=pt&nrm=isso. Acesso em: 12 fev. 2014.

ROCHA, J. L. **A Matemática do curso secundário na reforma Francisco Campos**. 2001. 228 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2001.

GeoGebra e volumes: uma proposta metodológica

Patricia Barretto Santos Souza
Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Introdução

É notória na prática pedagógica a dificuldade dos alunos no que tange à exploração da Geometria, em particular na Geometria Espacial. Talvez um dos motivos dessa dificuldade pode estar relacionado à forma de como é ministrada a disciplina nas escolas. Na maioria das vezes, as fórmulas matemáticas são impostas aos alunos sem esclarecimentos adicionais. O ensino-aprendizagem da Matemática pode assumir dinamicidade com atividades que envolvam recursos tecnológicos e permitam aos alunos desenvolverem seu próprio percurso construindo uma visão mais completa do assunto abordado. Diante disso, o foco desta pesquisa foi a inserção das tecnologias no estudo do volume dos sólidos geométricos atrelada ao Princípio de Cavalieri.

Sobre o uso das mídias nas aulas de Matemática "é preciso que a chegada de uma mídia qualitativamente diferente, como a informática, contribua para modificar as práticas do ensino tradicional vigentes" (BORBA, 2001). Diante disso, realizaram-se oficinas de estudo com discentes do 3º ano do Ensino Médio, do Colégio Estadual Francisco da Conceição Menezes, em Santo Antônio de Jesus, Bahia, utilizando computadores do laboratório de informática, nos quais foi utilizado o *software* educacional, GeoGebra, como ferramenta facilitadora no estudo dos sólidos geométricos.

O GeoGebra foi escolhido por ser gratuito, com interface fácil de manipulação, interação e visualização. E mais, por ser um *software* de Geometria Dinâmica, o mesmo constitui uma ferramenta poderosa para superar obstáculos próprios da aprendizagem, uma vez que este programa possibilita experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, argumentar e deduzir propriedades matemáticas, segundo Gravina (1996). Dessa forma, é possível verificar as propriedades válidas para o estudo de volumes.

Na Geometria Dinâmica a condição de analisar as propriedades e suas relações matemáticas é ampliada em decorrência do processo de representar um objeto.

"As novas tecnologias têm um grande potencial para trazer mudanças significativas à educação" (SALGADO, 2008). No entanto, para acontecer essas mudanças, faz-se necessário que o processo ensino-aprendizagem seja repensado e para tal, é de suma importância que o professor mediador faça o *link* adequado do que será trabalhado com as tecnologias computacionais, no intuito de resgatar uma disciplina que propicie o desenvolvimento lógico do raciocínio na busca de soluções para os problemas.

Este artigo apresenta estratégias que buscam auxiliar a concretização da ideia de volume, diversas vezes não entendidas e compreendidas pelos alunos. Tal fato deve-se à ausência de aplicações concretas na condução do conteúdo. As atividades desenvolvidas com a utilização do *software* GeoGebra colabora para amenizar essa questão.

GeoGebra

GeoGebra é um *software* educacional de Matemática Dinâmica que engloba Álgebra, Cálculo e Geometria. Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, juntamente com uma equipe internacional de programadores, desenvolveram este programa no intuito de facilitar a aprendizagem matemática nas instituições educacionais de acordo com Hohenwarter (2009). O GeoGebra é escrito na linguagem Java, pode ser usado nas plataformas Microsoft Windows, Linux, Macintosh e tem acesso livre. Possibilita a abordagem de inúmeros conteúdos pertinentes ao currículo de Matemática tanto do Ensino Básico quanto do Ensino Superior. Pode-se fazer o *download* deste *software* no *site*[1] *e encontrar materiais construídos no GeoGebra dos mais diversos assuntos de Matemática.*

Segundo Hohenwarter (2009), este software permite a construção de maneira simplificada de pontos, figuras, segmentos, retas, vetores, cônicas, além de gráficos de funções dinamicamente modificáveis com o mouse.

Conforme Hohenwarter (2009, p. 6):

> O GeoGebra fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica ou numérica, e a Folha de Cálculo. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (ex. pontos, gráficos de funções), algebricamente (ex. coordenadas de pontos, equações) e nas células das folhas de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

Princípio de Cavalieri

O matemático Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) nasceu em Milão e aos quinze anos de idade tornou-se jesuado.

Bonaventura Cavalieri foi aluno de Galileu e anos depois, na Universidade de Bolonha, atuou como professor de Matemática (1629-1647). Sua obra foi ampla no que tange à Matemática, Óptica

1 - https://www.geogebra.org/

e Astronomia. Foi um dos principais responsáveis pela introdução dos logaritmos na Europa, o que o tornou um matemático influente.

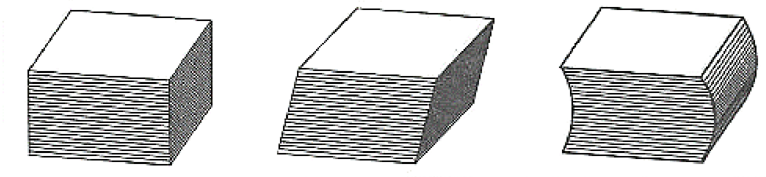
A obra de maior destaque que deu uma grande contribuição à Matemática foi o tratado *Geometria indivisibilibus*, sua versão inicial foi publicada em 1635 de acordo com Eves (2004). Ele apresenta neste trabalho seu método dos indivisíveis cujas raízes remontam a Demócrito e Arquimedes, entretanto acreditamos que seu maior incentivo tenha sido as experiências de Kepler encontrar determinadas áreas e certos volumes.

Por faltar clareza e ser muito longo o tratado de Cavalieri dificulta o entendimento do que ele entendia como "indivisível". Eves (2004, p. 425) relata que:

> Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma seção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de seções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Um procedimento análogo com os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original.

Pode-se exemplificar isto com a formação de uma pilha vertical de folhas de papel e depois deformando suas laterais transformando-as em superfícies curvas, conforme a Figura 1. Observa-se que o volume não modifica com essa deformação. Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem o chamado Princípio de Cavalieri.

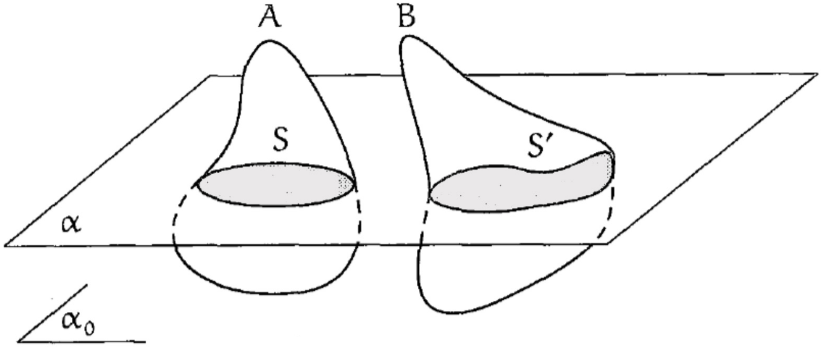
Figura 1 - Pilha de folhas de papel para ilustrar o Princípio de Cavalieri.



Fonte: Lima (2006, p. 255).

O Princípio de Cavalieri, segundo Lima (2006), diz que dados dois sólidos A e B e um plano α_0, se todo plano α paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área S e S', conforme se vê na Figura 2, então esses sólidos têm mesmo volume.

Figura 2 - Princípio de Cavalieri.



Fonte: Lima (2006, p. 256).

O Princípio de Cavalieri é de grande valia para o cálculo de áreas e volumes e, também, suas bases intuitivas podem tornar-se rigorosa com o Cálculo Integral Moderno. Intuitivamente, podemos solucionar diversos problemas de mensuração que geralmente exigiriam técnicas avançadas de Cálculo. Detalhes adicionais acerca do assunto podem ser encontrados em Lima (1991), Boyer (2001), Eves (2004)e Lima *et al.* (2006).

Metodologia

A pesquisa teve um cunho qualitativo, na qual a pesquisadora se fez presente nas interações entre os participantes, dessa forma foi possível fazer o registro, a análise e a condução dos diálogos referentes ao objeto de estudo.

Para a concretização deste trabalho planejaram-se seis oficinas, visando proporcionar estratégias para uma melhor compreensão do cálculo do volume dos sólidos geométricos. Para tal, foram utilizados vídeos, o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e o Princípio de Cavalieri.

As oficinas realizaram-se no período de 23/04/2015 a 18/05/2015 no laboratório de informática do Colégio Estadual Francisco da Conceição Menezes, em Santo Antônio de Jesus-BA, no turno oposto ao que os alunos estudam. A duração média de cada oficina foi de três horas. Foram escolhidos para participar da pesquisa discentes do 3º ano, em virtude de os mesmos estarem concluindo o Ensino Médio e prestes a participarem do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e vestibulares diversos.

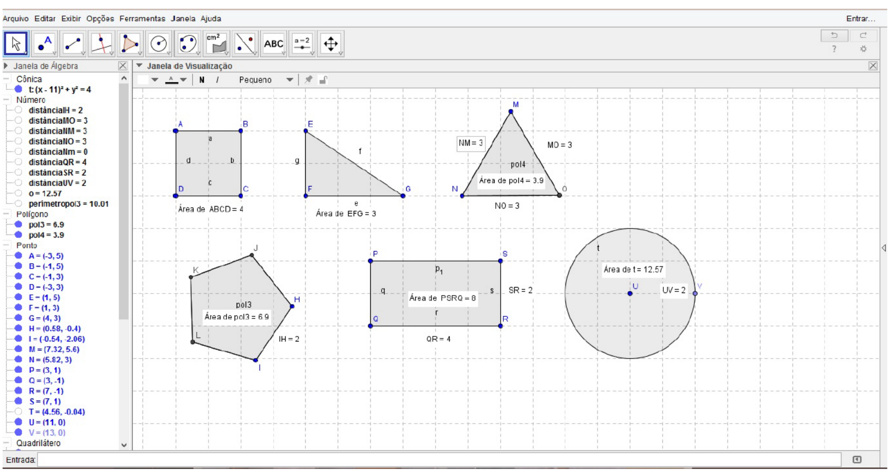
As oficinas

As oficinas foram planejadas enfatizando os pontos principais de cada sólido atrelado ao uso do GeoGebra. Na primeira oficina aplicou-se um teste de sondagem com os discentes para observar seus conhecimentos acerca do assunto que seria abordado. Nas oficinas seguintes foram aplicados exercícios com um menor grau de dificuldade; já nas últimas, utilizaram-se questões do ENEM e de vestibulares que eram exames almejados pelo público alvo da pesquisa. Para finalizar realizou-se novamente um teste, semelhante ao teste de sondagem inicial, acrescido de mais algumas questões para verificar se houve aprendizado dos conteúdos trabalhados por parte dos alunos.

Para iniciar, assistiu-se vídeos sobre o tema em questão e houve um diálogo sobre a Geometria no dia-a-dia. Em seguida, explanou-se sobre o *software* GeoGebra e os alunos tiveram oportunidade de acessar o site oficial[2], no qual pôde-se fazer *download* dos arquivos existentes e compartilhar as criações realizadas. Mostrou-se, também, diversos sólidos construídos no programa, aproveitando para fazer diversas manipulações nos sólidos permitidas pelo programa.

Como há a necessidade do conhecimento do cálculo das áreas das bases dos sólidos para determinar seu volume, então efetuou-se uma revisão das áreas das figuras planas. Os alunos receberam propostas de atividades envolvendo áreas e eles utilizaram o GeoGebra para confirmarem seus resultados, como observa-se na imagem da Figura 3.

Figura 3 - Áreas das figuras planas no GeoGebra.



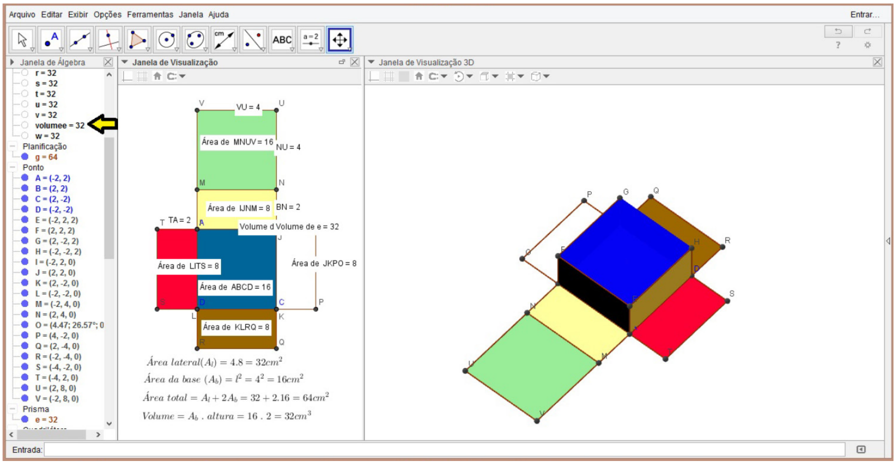
Fonte: Souza (2015, p. 50).

2 - https://www.geogebra.org/

Na sequência usou-se o *Datashow* para assistir aos vídeos sobre prismas, nos quais foram explorados seus elementos, classificações, secções, áreas da base, lateral, total e volume.

Os alunos também pesquisaram no *site*[3] arquivos referentes ao assunto em questão e foram resolvidos exercícios, nos quais os resultados foram verificados no GeoGebra, como pode ser visto na Figura 4.

Figura 4 - Área total e volume do cubo no GeoGebra.

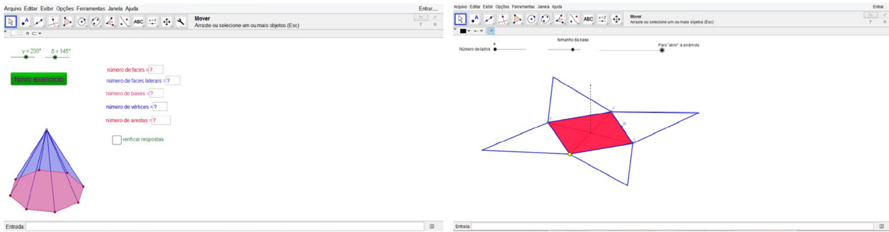


Fonte: Souza (2015, p. 51).

Na 2ª e 3ª oficinas trabalhou-se com a pirâmide abordando os elementos, a classificação, pirâmides regulares e seus elementos e a área da superfície, como se vê na Figura 5; o cilindro, o cone, na Figura 6, e esfera com abordagem análoga. Seguiu-se a mesma dinâmica da primeira oficina, com o uso do vídeo e resolução de exercícios.

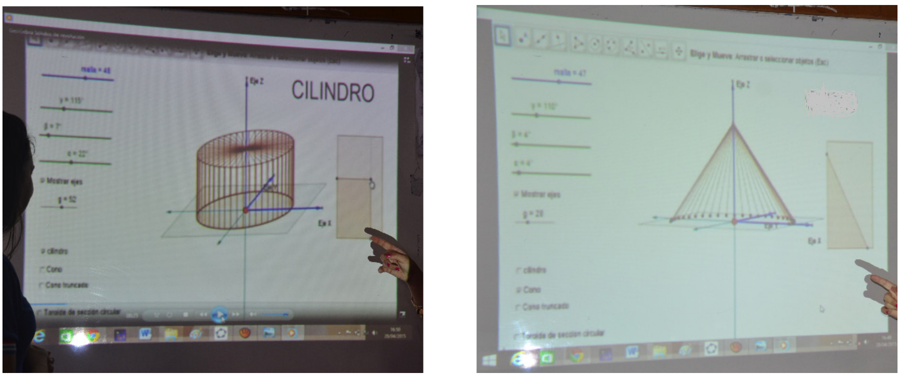
3 - http://geogebratube.org/

Figura 5 - A pirâmide e sua planificação no GeoGebra.



Fonte: Souza (2015, p. 52).

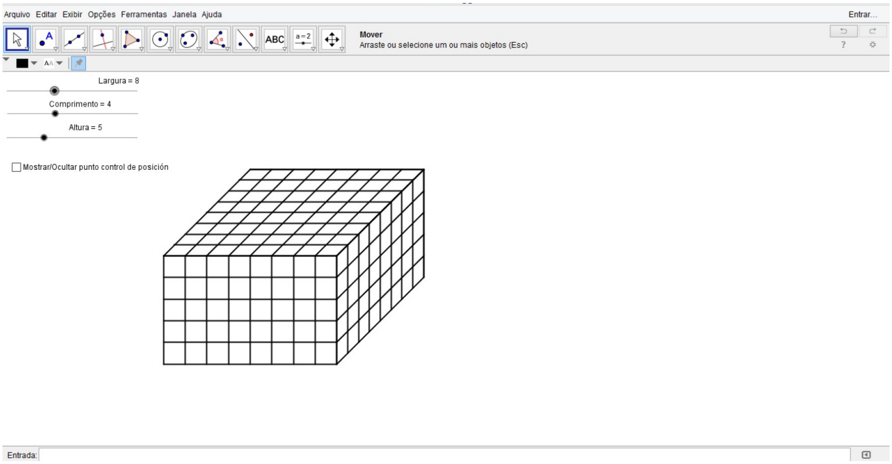
Figura 6 - Representação do cilindro e do cone no GeoGebra, respectivamente.



Fonte: Souza (2015, p. 53).

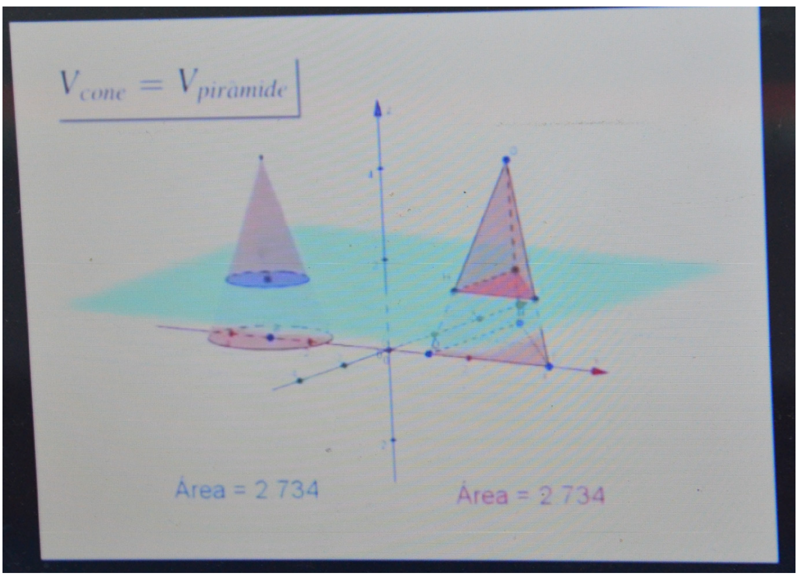
Iniciou-se a 4ª oficina mostrando a ideia de volume (Figura 7), a partir da ideia intuitiva do volume do cubo, generalizou-se e obteve-se o volume do bloco retangular. Apresentou-se o Princípio de Cavalieri (Figura 8) e aceitou-o como verdadeiro. Segundo Lima (1991), a utilização deste Princípio "permite a simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume". A partir daí abordaram-se as fórmulas para os cálculos dos volumes dos principais sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cilindros e cones) com o propósito dos alunos compreenderem melhor (Figuras 9 e 10), uma vez que em sua maioria são impostas aos mesmos sem esclarecimentos.

Figura 7 - Ideia de volume no GeoGebra.



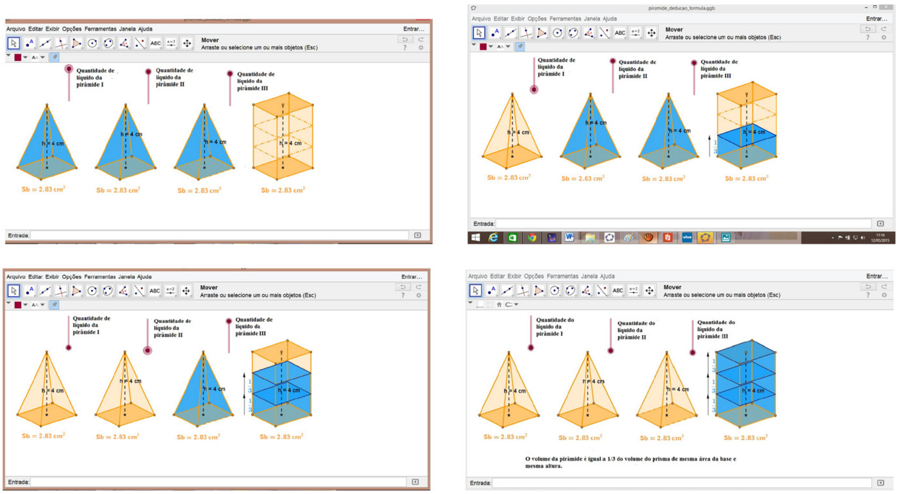
Fonte: Souza (2015, p. 53).

Figura 8 - Aplicação do Princípio de Cavalieri.



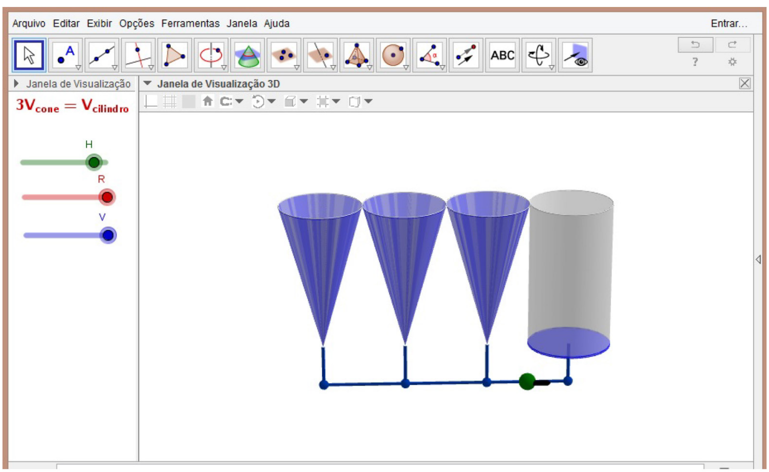
Fonte: Souza (2015, p. 55).

Figura 9 - Relação do volume da pirâmide x prisma.



Fonte: Souza (2015, p. 54).

Figura 10 - Relação entre o volume do cone e do cilindro.

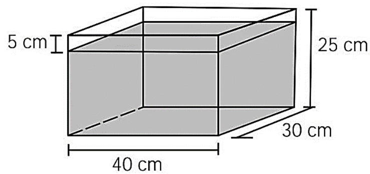


Fonte: Souza (2015, p. 55).

Os discentes resolveram questões do ENEM e de vestibulares na 5ª oficina, conferindo os resultados no GeoGebra, conforme Figuras 12, 14 e 16. Tais questões são listadas a seguir:

Questão 1: (ENEM – 2012) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na Figura 11.

Figura 11 - Referente a questão1.



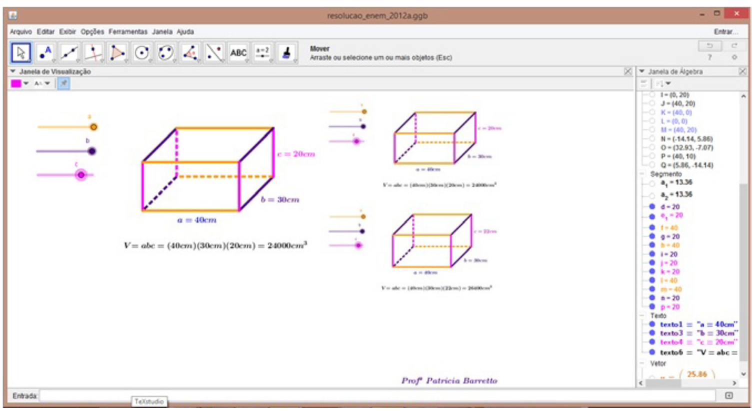
Fonte: Souza (2015, p. 56).

O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2400 cm^3?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
b) O nível subiria 0,1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

Resolução no GeoGebra

Figura 12 - Resolução no GeoGebra da questão 1.

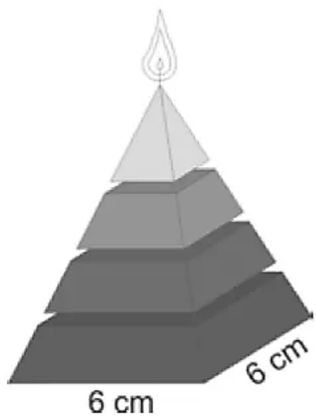


Fonte: Souza (2015, p. 57).

Questão 2: (ENEM – 2009) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmides de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a Figura 13.

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

Figura 13 - Referente a questão 2.

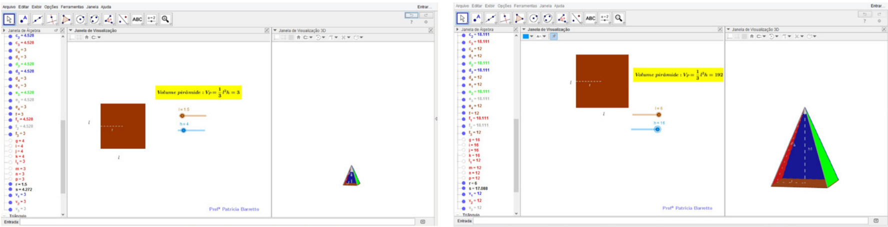


Fonte: Souza (2015, p. 58).

a) 156 cm^3
b) 189 cm^3
c) 192 cm^3
d) 216 cm^3
e) 540 cm^3

Resolução no GeoGebra

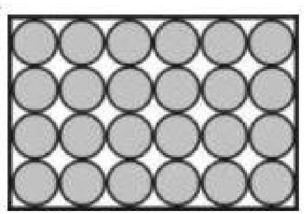
Figura 14 - Resolução no GeoGebra da questão 2.



Fonte: Souza (2015, p. 59).

Questão 3: (UTFPR) Uma lata de achocolatado em pó tem 10 cm de diâmetro e 10 cm de altura, e são embaladas em caixas de papelão, com quatro fileiras de seis latas, conforme a Figura 15. A caixa comporta 2 latas na sua altura, tendo uma capacidade total para 48 latas.

Figura 15 - Referente a questão 3.



Fonte: Souza (2015, p. 60).

Baseado nos estudos de cilindros e paralelepípedos e considerando $\pi = 3,14$, afirma-se que:

I) O volume de cada lata é de 785 cm^3.

II) A área total de cada lata é de 471 cm^2.

III) O volume da caixa de papelão é de 24000 cm^3.

Analisando-se as afirmações acima, conclui-se que:

a) I e II estão corretas.

b) I e III estão corretas.

c) II e III estão corretas.

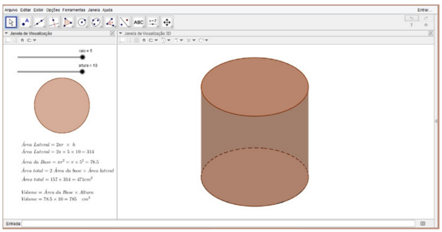
d) I, II e III estão corretas.

e) I, II e III estão incorretas

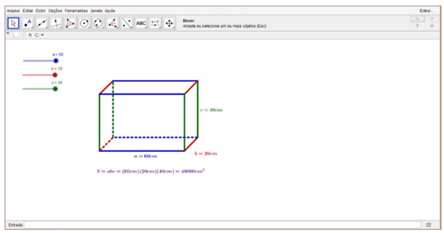
Resolução no GeoGebra

Figura 16 - Resolução no GeoGebra da questão 3.

Análise dos itens I e II



Análise do item III.



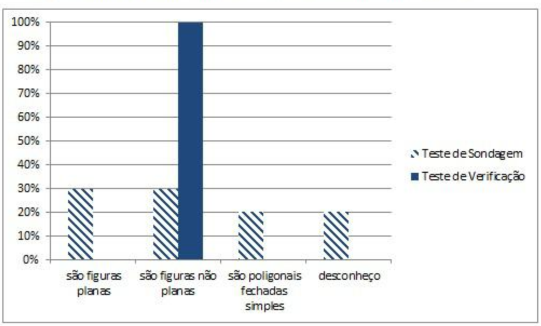
Fonte: Souza (2015, p. 61).

Aplicou-se um teste de verificação na 6ª oficina. As seis primeiras questões foram as mesmas do teste de sondagem e foram acrescentados quatro exercícios relativos ao cálculo de volumes dos sólidos geométricos.

Os resultados dos testes de verificação estão a seguir. Nas questões iguais ao teste de sondagem, fez-se um gráfico comparativo da evolução dos discentes (Figuras 17, 18, 19 e 20).

Figura 17 - Primeira questão do teste de sondagem e verificação.

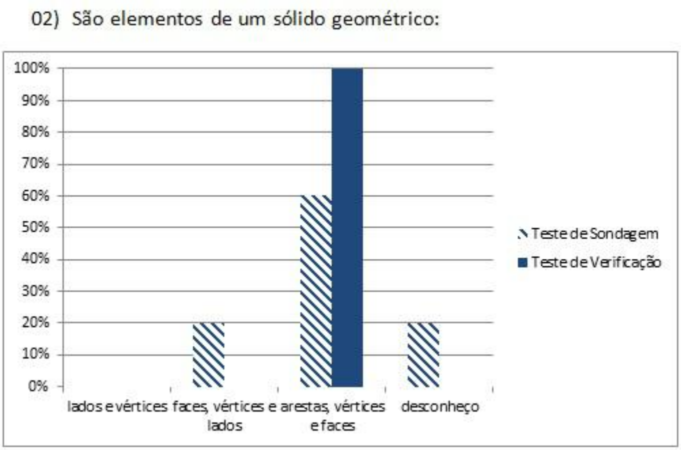
01) A respeito de um sólido geométrico podemos afirmar que:



Fonte: Souza (2015, p. 62).

Na primeira questão no teste de sondagem apenas 30% dos alunos responderam corretamente à questão, enquanto que no teste de verificação 100% acertaram.

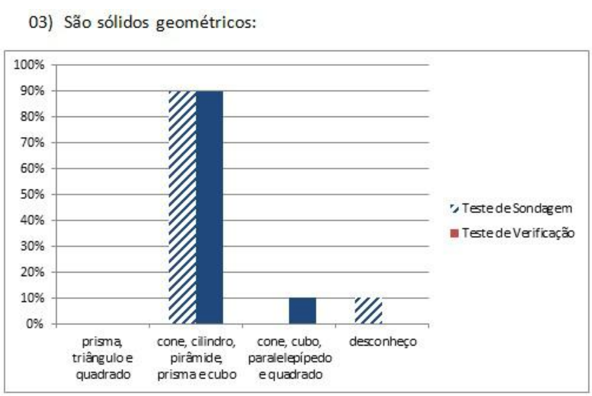
Figura 18 - Segunda questão do teste de sondagem e verificação.



Fonte: Souza (2015, p. 62).

Sessenta por cento dos discentes acertaram a segunda questão no teste de sondagem e cem por cento no de verificação.

Figura 19 - Terceira questão do teste de sondagem e verificação.

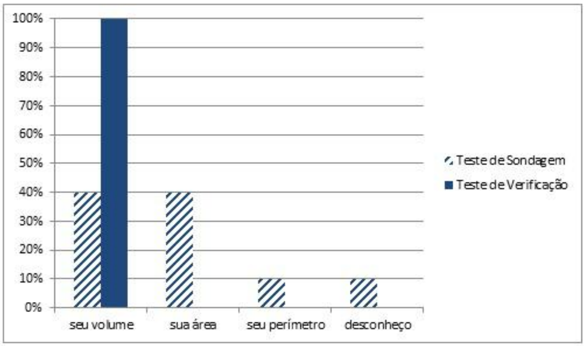


Fonte: Souza (2015, p. 63).

Na terceira questão, tanto no teste de sondagem quanto de verificação, 90% dos alunos acertaram.

Figura 20 - Quarta questão do teste de sondagem e verificação.

04) Considerando um reservatório de água que possui 5m de comprimento, 4m de largura e 2m de altura, ao multiplicarmos todas as suas dimensões, estamos na verdade calculando:

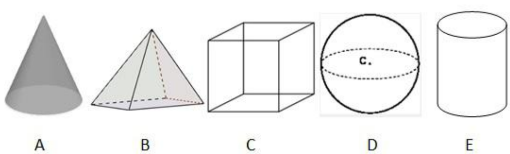


Fonte: Souza (2015, p. 63).

Na quarta questão 40% responderam corretamente no teste de sondagem, já no teste de verificação 100% dos discentes acertaram.

Figura 21 - Quinta questão do teste de sondagem e verificação.

05) Faça a associação corretamente:



( ) Cilindro

( ) Pirâmide

( ) Cone

( ) Cubo

( ) Esfera

Fonte: Souza (2015, p. 64).

Em relação a quinta questão, vide Figura 21, no teste de sondagem 100% dos alunos fizeram a associação corretamente no que diz respeito ao cone a pirâmide; 80% relacionaram corretamente o cubo e 70% associaram corretamente a esfera e o cilindro. E no de verificação, 100% dos alunos fizeram a associação corretamente.

Figura 22 - Sexta questão do teste de sondagem e verificação.

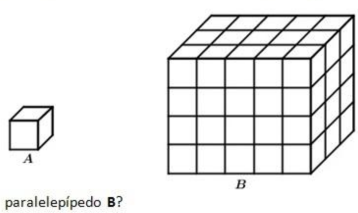
06) Elabore um pequeno texto sobre a ideia que você tem sobre sólidos geométricos, identificando suas características. Na oportunidade exemplifique através de uma situação do cotidiano a importância do conhecimento sobre eles.

Fonte: Souza (2015, p. 65).

Nasextaquestão,conformeaFigura22,notestedesondagem,apenas 20% definiram corretamente os sólidos geométricos; 30% identificaram as suas características e 40% exemplificaram adequadamente os sólidos geométricos com situações do cotidiano. Enquanto que no de verificação, 20% definiram corretamente os sólidos geométricos; 30% identificaram as suas características e 40% exemplificaram adequadamente os sólidos geométricos com situações do cotidiano.

Figura 23 - Sétima questão do teste de verificação.

07) (UNESP) Quantos cubos **A** precisa-se empilhar para formar o



paralelepípedo **B**?

( ) 60

( ) 47

( ) 94

( ) 39

( ) 48

Fonte: Souza (2015, p. 66).

Nesta questão 7, de acordo com a Figura 23, 100% dos alunos calcularam corretamente quantos cubos eram necessários empilhar para formar o paralelepípedo.

Figura 24 - Oitava questão do teste de verificação.

08) (Unirio – RJ) Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura a seguir.
Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3, então o volume do cubo, em m^3, é igual a:

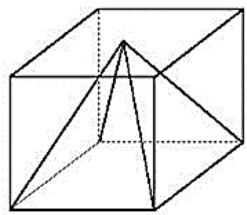
( ) 9

( ) 12

( ) 15

( ) 18

( ) 21



Fonte: Souza (2015, p. 67).

Em relação a questão 8, vide Figura 24, 80% dos discentes calcularam o volume do cubo adequadamente.

Figura 25 - Nona questão do teste de verificação.

09) (UEL-PR) Dois recipientes cilíndricos tem altura de 40 cm e raios da base medindo 10 cm e 5 cm. O maior deles contem água até 1/5 de sua capacidade. Essa água é despejada no recipiente menor, alcançando a altura h de:

( ) 32 cm

( ) 24 cm

( ) 16 cm

( ) 12 cm

( ) 10 cm

Fonte: Souza (2015, p. 67).

Na nona questão, conforme a Figura 25, 70% calcularam corretamente a altura alcançada pela água no recipiente menor. E na questão 10, vide Figura 26, 70% acertaram o exercício.

Figura 26 - Décima questão do teste de verificação.

10) (UNESP) Um copinho de sorvete, em forma de cone, tem 10 cm de profundidade, 4 cm de diâmetro no topo e tem aí colocadas duas conchas semiesféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro. Se o sorvete derreter para dentro do copinho, podemos afirmar que:

( ) não transbordará.
( ) transbordará.
( ) os dados são insuficientes.
( ) os dados são incompatíveis.
( ) todas as afirmações anteriores são falsas.

Fonte: Souza (2015, p. 68).

Conclusão

Neste artigo apresentou-se uma proposta de estudo para alunos do 3º ano do Ensino Médio, com o intuito de oferecer um maior significado ao estudo do cálculo dos volumes dos sólidos geométricos. Para que isto ocorresse utilizou-se o Princípio de Cavalieri atrelado ao GeoGebra.

Na análise realizada observou-se que os participantes das oficinas propostas tinham conhecimento razoável sobre áreas, o qual é necessário para o cálculo dos volumes, e o mínimo de conhecimento sobre o volume dos sólidos geométricos. Quando se mostrou o volume do cubo e do paralelepípedo a partir do preenchimento desses sólidos com os “cubinhos” menores, ou seja, as unidades de medida, os discentes entenderam como o volume é obtido.

A utilização das figuras espaciais construídas no GeoGebra foi primordial no desenvolvimento das fórmulas de volumes, uma vez que eles tiveram a oportunidade de posicionar o plano paralelo para seccionar e comparar os diversos sólidos geométricos, possibilitando, assim, deduzir que através do Princípio de Cavalieri podem-se encontrar as fórmulas dos volumes do cilindro, cone e esfera fazendo uma comparação com o volume já visto do paralelepípedo (prisma). Mostrou-se, também, no GeoGebra a decomposição do prisma em três pirâmides, o que facilitou o entendimento do porquê de a fórmula do volume da pirâmide ser um terço do volume do prisma.

Com o desenvolvimento das oficinas foi evidente o crescimento do aprendizado em relação ao assunto abordado. Foram propostas questões de exames do interesse dos alunos, do ENEM e de vestibulares, as quais foram resolvidas, também, com a utilização do GeoGebra. Eles acharam que a interpretação das questões ficou mais fácil com a visualização e a manipulação das figuras no programa.

Utilizar um *software* de Geometria Dinâmica ajudou bastante na compreensão do conceito de volume e no desenvolvimento de estratégias para o cálculo do volume dos sólidos geométricos, uma vez que os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver o pensamento geométrico e a visualização espacial em relação aos sólidos estudados.

Conclui-se, no final desta pesquisa, que se faz necessário que os educadores propiciem aos alunos metodologias diferenciadas, dinamizando o ambiente de ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Nesse sentido, acredita-se que as oficinas de estudo expostas possam contribuir nesse sentido.

Referências

BORBA, M. C. PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2001.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

GeoGebra. **Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro.** Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/. Acesso em 6 jun. 2020.

GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica**: Uma Nova Abordagem para o Aprendizagem da Geometria. *In*: VII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, pp. 1-13, 1996, Belo Horizonte. Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/bib.html. Acesso em 6 jun. 2020.

HOHENWARTER, M. **GeoGebra**: Aplicativos Matemáticos. 2020. Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt. Acesso em 6 jun. 2020.

LIMA, E. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. **Medida e Forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

SALGADO, M. U. C. AMARAL, A. L. **Tecnologias da educação**: ensinando e aprendendo com as TIC: guia do cursista. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação à Distância, 2008.

SOUZA, P. B. S. **O *software* GeoGebra atrelado ao Princípio de Cavalieri como mediador no estudo do cálculo do volume dos sólidos geométricos.** 2015. 109 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas, 2015.

Geometria não-Euclidiana: aplicações na Educação Básica

Osnildo Andrade Carvalho
Juarez dos Santos Azevedo

Introdução

A Geometria (Euclidiana) trabalhada nas escolas normalmente é considerada pelos estudantes como única. Este fator acarreta a uma falsa ideia de que não existe a possibilidade de outras Geometrias. Desta forma, apresentar aos estudantes que é possível existir outras Geometrias, diferentes da Geometria Euclidiana pode ajudar numa reflexão mais ampla sobre as teorias matemáticas.

Neste sentido, o presente trabalho propõe tratar dos elementos históricos da Geometria Euclidiana que fundamentaram o surgimento das Geometrias não-Euclidianas, em particular da Geometria Esférica a partir da dissertação de Carvalho (2014). Além disto, apresenta algumas aplicações em formas de tarefas para os estudantes da Educação Básica.

Partindo desses pressupostos, levanta-se as seguintes indagações: Como surgiu a Geometria Esférica? Quais os seus elementos principais? Existe alguma analogia com elementos da Geometria Euclidiana? É possível apresentá-la para os estudantes da educação básica? Estas perguntas estão diretamente ligadas a este trabalho.

Assim, a proposta é apresentar aos estudantes e professores do Ensino Básico que a Geometria vai muito além do que está no currículo atual. Certas propriedades, como teorema de Pitágoras, propriedades dos triângulos são válidas apenas para a Geometria Euclidiana, mostrando sua limitação e abrindo, desta forma, lacunas para outras Geometrias, como a Esférica (esta com seus próprios teoremas e axiomas), possibilitando uma forma diferente de ver o mundo ao seu redor.

Preliminares: geometrias não-euclidianas

Histórico da Geometria Euclidiana

O livro *Os Elementos,* proposto por Euclides, foi um trabalho extremamente relevante, visto que até hoje a Geometria trabalhada na Escola Básica está diretamente ligada aos postulados e teoremas apresentados na mesma época por Euclides. Assim, possui enorme importância para as gerações seguintes devido ao seu aspecto formal, se tornando um modelo para a Matemática trabalhada nas escolas (EVES, 2004; SANTOS, 2010).

Apesar da impressão difundida, *Os Elementos* não trata apenas de Geometria, uma vez que a coleção de livros também apresenta Álgebra Elementar e Teoria dos Números. Além disso, é composto de 465 proposições distribuídas em treze volumes.

A seguir, são apresentados os cinco postulados mencionados por Euclides:

P_1: É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.

P_2: É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.

P_3: É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

P_4: Todos os ângulos retos são iguais entre si.

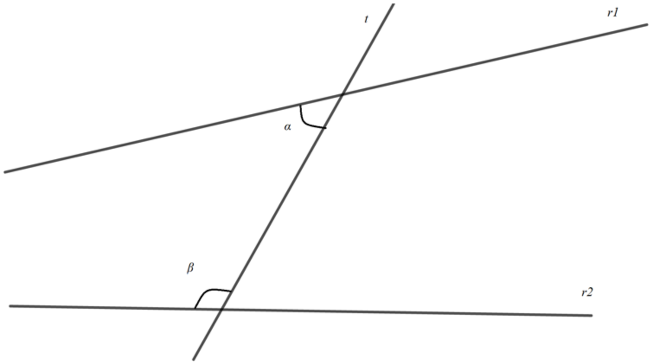
P_5: Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente, elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Por intermédio destes postulados, Euclides construiu a Geometria que se estuda hoje, tanto na Educação Básica como na Superior, conhecida por Geometria Euclidiana. Através de uma breve análise é possível perceber que os postulados P_1 e P_2 estabelecem a existência de uma reta determinada por dois pontos. Enquanto o P_3 estabelece a existência do círculo, apenas com o raio e o centro. E, no caso do postulado P_4, apenas estabelece uma congruência entre ângulos retos.

No caso do postulado P_5 (Figura 1), devido a sua forma de escrita não ser tão direta, diversos matemáticos durante mais de dois milênios imaginaram se tratar de um teorema e não de um postulado. Nesse sentido, de acordo com Coutinho (2001), o mesmo poderia ser demonstrado a partir dos quatro primeiros postulados. Na tentativa de melhorar o entendimento, outros enunciados surgiram. Dentre estes, o mais conhecido foi o do matemático e físico escocês, John Playfair (1748-1819): *“Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada”* (EVES, 2004, p. 589). Segundo Eves (2004), isto se tornou o quinto postulado conhecido como postulado das paralelas. Outras alternativas para o postulado das paralelas são as seguintes:

(1) Há pelo menos um triângulo cuja a soma dos ângulos internos é igual a um angulo raso;
(2) Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos;
(3) Por três pontos não-colineares pode-se traçar um círculo;
(4) Por qualquer ponto interior de um ângulo menor que 90º pode-se sempre traçar uma reta que intercepta ambos os lados do ângulo.

Figura 1 - O quinto postulado de Euclides.



Fonte: Carvalho (2014, p. 19).

Assim como mencionado, por quase dois mil anos matemáticos se esforçaram para apresentar uma prova, isto é, uma demonstração para o quinto postulado. Apesar de fracassarem nesta tentativa, os esforços foram essenciais para o surgimento de novas Geometrias.

Tentativas frustradas de demonstrações

Como nenhuma das tentativas em provar o quinto postulado teve êxito, chegou-se à conclusão: **não existe uma demonstração para o postulado das paralelas, considerando os quatro primeiros postulados como hipótese**. Alguns matemáticos no decorrer da história fizeram tentativas, mesmo que fracassadas para a prova dos postulados das paralelas. Dentre elas, destacam-se:

Ptolomeu (90 - 168 d.C.), escreveu um livro sobre o postulado das paralelas com o título: “Linhas prolongadas de ângulos menores que dois ângulos retos encontram-se uma com a outra”. Este fato foi citado posteriormente por Proclus (410-485 d.C.), afirmando que Ptolomeu cometeu um equívoco em admitir que a propriedade (que leva o nome do seu livro) seja verdadeira somente sob a validade do postulado das paralelas. Desta forma, de acordo Wolfe (1945), Ptolomeu assume que as propriedades aceitas para os ângulos interiores de um lado da reta transversal também devem ser válidas para os ângulos do outro lado.

Posteriormente, o próprio Proclus (410-485 d.C.) propôs uma prova. Com o argumento de mostrar que dadas duas retas paralelas, se uma transversal intercepta uma delas, deverá então interceptar a outra. Desta forma, em sua demonstração acaba admitindo que duas retas paralelas são equidistantes. Contudo, essa afirmação é válida apenas dentro da Geometria Euclidiana como consequência do quinto postulado.

Em seguida, Nasiraddin (1201-1274), astrônomo e matemático persa, possivelmente pode ter sido o primeiro a dirigir sua atenção para o quinto postulado, utilizando o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo. Entretanto, de acordo Wolfe (1945), sua demonstração também acaba implicitamente considerando como verdade o quinto postulado.

Em 1663, o geômetra inglês John Wallis (1616-1703), na Universidade de Oxford, ofereceu uma prova de sua autoria para o quinto postulado. Nessa prova, segundo Rocha (2013), ele desprende-se da ideia de assumir retas paralelas sendo equidistantes. Assim, propôs um novo axioma: *Seja um triângulo ΔABC e um segmento DE quaisquer. Existe um triângulo ΔDEF (tendo DE como um de seus lados) que é semelhante a ΔABC*, substituindo o postulado das paralelas. Infelizmente, não fez mais do que dar um novo enunciado ao quinto postulado proposto por Euclides.

Giorolamo Saccheri (1667-1733), no século XVIII, professor jesuíta de Matemática em Pavia, na sua tentativa de provar o quinto postulado utilizou o método *redução ao absurdo*. Entretanto, seu trabalho não conseguiu convencer outros matemáticos. Apesar disso, é interessante que suas conclusões se aproximaram do que hoje se chama de Geometria não-Euclidiana. O curioso é que, de acordo

Ronan (2001), Saccheri rejeitou-as imediatamente, declarando que uma Geometria dessa espécie era repugnante.

Na tentativa de provar o quinto postulado, o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777), parece ter tido consciência de não ter conseguido. De acordo Boyer (2010), ninguém mais chegou tão perto da verdade sem descobrir as Geometrias não-Euclidianas. Apesar dos esforços empreendidos na época para se encontrar uma demonstração para o quinto postulado, no início do século XIX surgiram as primeiras suspeitas de que a demonstração tanto procurada era impossível (ROCHA, 2013). Os primeiros a perceber este fato foram os matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) e Nicolai Lobachevsky (1793-1856). Assim, seus trabalhados consistiram na negação do quinto postulado o que motivou o surgimento de Geometrias não-Euclidianas.

Surgimento das Geometrias não-Euclidianas

Na primeira metade do século XIX foi descoberta uma Geometria autoconsistente, distinta da Geometria de Euclides. Com a substituição do quinto postulado, ou postulado das paralelas, surgem dois tipos clássicos de Geometrias não-Euclidianas: *Geometria Hiperbólica* e a *Geometria Esférica* (EVES, 2011, p. 539).

De acordo com Coutinho (2001), enquanto na Geometria Hiperbólica o quinto postulado de Euclides é substituído pela seguinte afirmativa: dado um ponto P, fora de uma reta r, existe mais de uma paralela a esta reta r, na Geometria Esférica postula-se que não existe nenhuma reta paralela.

Carl Friedrich Gauss foi o primeiro a escrever sobre as ideias de uma nova Geometria, embora não tenha publicado tais escritos, temeroso das reações pouco receptivas da comunidade científica da época. Mas, de acordo com Tenório *et al.* (1995), seus escritos foram fundamentais, pois levaram a independência do quinto postulado.

Contudo, Gauss compartilhou suas ideias com um colega da Universidade de Göttingen, o matemático húngaro Farkas Bolyai. Em carta, datada de 17 de dezembro de 1799, ele escreveu:

> É verdade que cheguei a várias coisas que muitas pessoas considerariam uma prova: mas, em meus olhos, elas nada provam. Por exemplo, se alguém conseguisse demonstrar a possibilidade de um triângulo retilíneo cuja área fosse maior do que qualquer área dada, então eu estaria pronto para provar o conjunto da Geometria de maneira absolutamente rigorosa. Muitas pessoas admitiriam isso como um axioma, mas eu não. De fato, seria possível que a área ficasse sempre abaixo de certo limite, não importando o quão longe os três vértices do triangulo fossem colocados (GARBI, 2010, p. 101).

Foram trocadas diversas correspondências entre Gauss e Farkas Bolyai, o que possivelmente indica que Farkas Bolyai também empregou muita energia, sem resultados satisfatórios. De acordo com Garbi (2010), Gauss teve muito tempo para publicar seus trabalhos, mas jamais o fez.

Nesta época, Farkas Bolyai teve um filho com muita afinidade para a Matemática, Janos Bolyai (1802-1860), que aos treze anos já se revelava um gênio dominando completamente os cálculos diferencial e integral e outros ramos da Matemática superior, fato este que o levou a se dedicar na demonstração do quinto postulado onde chegou a resultados interessantes. Em 1823, em uma carta ao seu pai Farkas Bolyai, escreveu:

> Revolvi publicar um trabalho sobre as paralelas, tão logo tenha o material organizado. O objetivo ainda não foi alcançado, mas tenho feito descobertas maravilhosas que quase sou esmagado por elas, eu criei um universo inteiramente novo a partir do nada (GARBI, 2010, p. 102).

As palavras do pai em carta ao filho Janos Bolyai foram: “Pelo amor de Deus, eu peço, desista! Tema, tanto isto quanto as paixões sensuais, porque isso também pode tomar todo seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espirito e felicidade na vida!” (COUTINHO, 2001, p. 39). É possível perceber a preocupação do seu pai, visto que se tratava de um problema aparentemente insolúvel.

É importante perceber que a Geometria não-Euclidiana é pouco divulgada entre os estudantes do Ensino Básico, enquanto a Geometria Euclidiana exerce grande destaque. Por conta disso, é natural que esta Geometria seja inconscientemente considerada como única e universal entre estes estudantes. A ciência não se configura como verdade absoluta sendo esta, dinâmica e mutável. Partindo desse pressuposto, é importante analisar e refletir sobre seus conteúdos e abordagens durante o período acadêmico dos estudantes, levando-os a considerar a mutabilidade da ciência.

De maneira independente, dois matemáticos desenvolveram essa Geometria Hiperbólica: o russo Nicolai Lobachevsky (1792-1856) e, quase que simultaneamente, o matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860) que, apesar de suas convicções, não aprofundou suas pesquisas.

Entretanto, Lobachevsky dedicou mais de duas décadas à sua descoberta. Em 1826, apresentou seu trabalho pela primeira vez, na cidade de Kazan na Rússia, sem nenhuma aceitação, pois suas afirmações colocavam em dúvida a inquestionável Geometria de Euclides. Apesar disso, Lobachevsky publicou seus trabalhos finalizando sua obra, a Pangeometria, em 1855 (posteriormente ficou conhecida pelo seu nome). Uma curiosidade é que este texto foi ditado pelo fato de o mesmo estar idoso e cego, confirmando a sua confiança na sua descoberta e determinação (COUTINHO, 2001, p. 39).

Dessa forma, com o surgimento da Geometria Hiperbólica questionamentos surgiram sobre a possibilidade de outras Geometrias. Assim, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) contribuiu para a criação da chamada Geometria Esférica (ou Elíptica), que também ficou conhecida como

Geometria de Riemann. Nesse trabalho será apresentada uma ênfase na Geometria Esférica. Todavia, caso alguém tenha interesse na Geometria Hiperbólica, poderá consultar Carvalho (2014, p. 24).

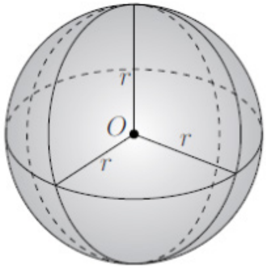
Elementos da Geometria Esférica

A Geometria Esférica admite os quatro primeiros postulados da Geometria Euclidiana, com exceção do quinto postulado sendo substituído pelo postulado de Riemann, a saber, *P5*: Por um ponto dado *P*, fora de uma reta *r*, não existe, paralela a esta reta *r*.

A escolha da Geometria Esférica se deu por conta da analogia com o Planeta Terra ou Globo Terrestre. Tal entendimento leva os estudantes a compararem os conceitos da Geometria Euclidiana, bem como as aplicações que estão diretamente ligadas a esta analogia. Isto poderá facilitar a compreensão dos conceitos e ajudar a fazer uma interdisciplinaridade com outros campos do saber, através da troca de informações e possíveis atividades em conjunto. Em seguida, iremos definir o conceito de esfera e sua relação com o planeta Terra.

Definição 1. Seja O um ponto do espaço e r um número real positivo. A superfície esférica é o lugar geométrico de pontos do espaço que mantém a mesma distância r do ponto fixo O, chamado de centro da esfera e, consequentemente, r o raio da esfera (Figura 2).

Figura 2 - Esfera.



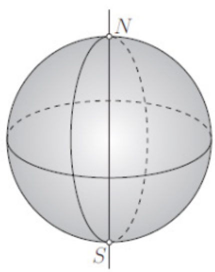
Fonte: Carvalho (2014, p. 33).

Nota-se que, segundo Tenório et al. (1995), o postulado das paralelas de Euclides não vale na Geometria Esférica, pois por um ponto P na superfície esférica fora de uma reta r (círculo máximo) não é permitido traçar nenhuma paralela à reta dada. Assim, é possível notar que duas retas (círculos máximos) quaisquer possuem sempre dois pontos comuns e opostos pelo diâmetro.

Para fins de comparação será considerado o planeta Terra como uma esfera, embora a mesma seja ligeiramente achatada nos polos e aproximadamente um elipsoide de revolução (ALVES, 2010). Na Figura 3, os dois pontos em destaque *N* e *S* são chamados de polos Norte e Sul, respectivamente, e o eixo que liga estes pontos *eixo polar*.

A proposta de definir alguns elementos do Globo Terrestre tem como finalidade compreender algumas aplicações da Geometria Esférica. Neste caso, será realizada uma breve explanação sobre o significado de tais definições.

Figura 3 - Eixo polar.



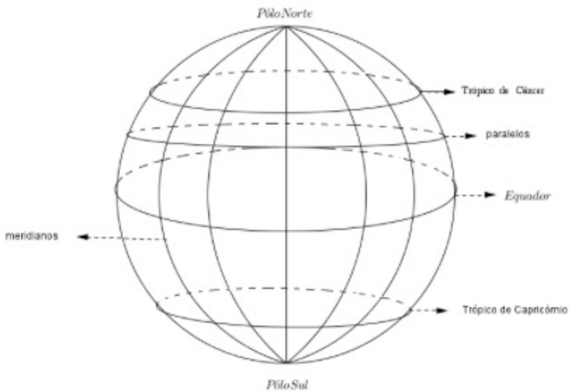
Fonte: Carvalho (2014, p. 34).

Inicialmente, cada círculo máximo no Globo Terrestre que passa pelos Polos Norte e Sul determinam dois semicírculos denominados de meridianos e, em especial, temos o meridiano de Greenwich1.

1 É o meridiano que passa sobre a localidade de Greenwich (no Observatório Real, nos arredores de Londres, Reino Unido) e que, por convenção, divide o globo terrestre em ocidente e oriente, permitindo medir a longitude.

Observe pela Figura 4 que o Equador também é um círculo máximo (e o único, considerando o plano perpendicular ao eixo polar passando pelo centro), além de dividir o globo terrestre em dois hemisférios, Norte e Sul. Os demais círculos formados pela intersecção de planos paralelos ao equador são chamados de paralelos (em especial temos os Trópicos de Capricórnio e Câncer, e os Círculos Polares Ártico e Antártico) que não são círculos máximos.

Figura 4 - Globo Terrestre.

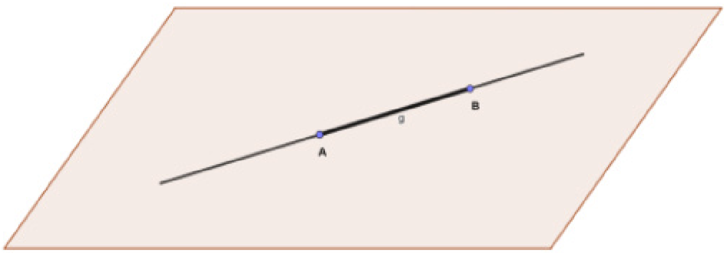


Fonte: Carvalho (2014, p. 36).

O planeta Terra possui um movimento em torno do eixo polar de Oeste para Leste chamado de rotação que promove as sucessões entre dias e noites. Para encontrar os Pontos Cardeais é preciso observar que o Polo Norte fica à frente de um observador que tenha a direção Leste à sua direita, onde a direção Leste é o nascer do sol. Desta forma, quando o dia está amanhecendo em Portugal, por exemplo, no Brasil ainda é noite e ainda vai amanhecer.

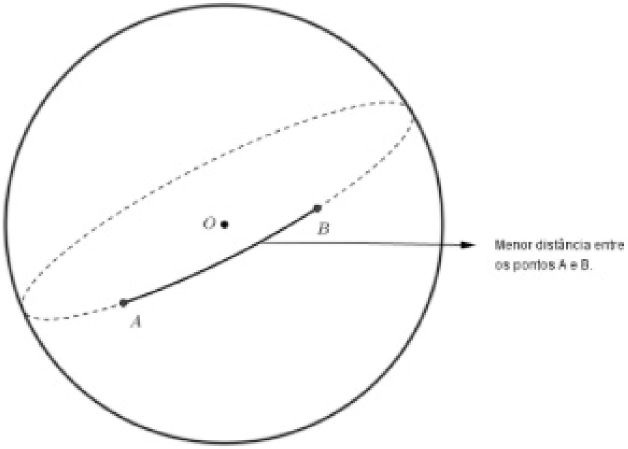
Na Geometria Esférica, os principais elementos em comparação com Geometria Euclidiana são: os planos (superfície esférica), as retas (círculos máximos) e os pontos (TENÓRIO et al., 1995). Da Geometria Euclidiana é sabido que a menor distância entre dois pontos A e B é obtida percorrendo-se o segmento de reta que une os dois pontos (Figura 5). No caso da Geometria Esférica, a reta é o círculo máximo e o segmento que une os pontos A e B é um arco do círculo máximo (Figura 6). Com isso, a distância na superfície esférica dos pontos A e B é a menor porção do círculo máximo que contém esses pontos.

Figura 5 - Menor distância entre dois pontos no plano euclidiano.



Fonte: Carvalho (2014, p. 36).

Figura 6 - Menor distância entre dois pontos no plano esférico.



Fonte: Carvalho (2014, p. 37).

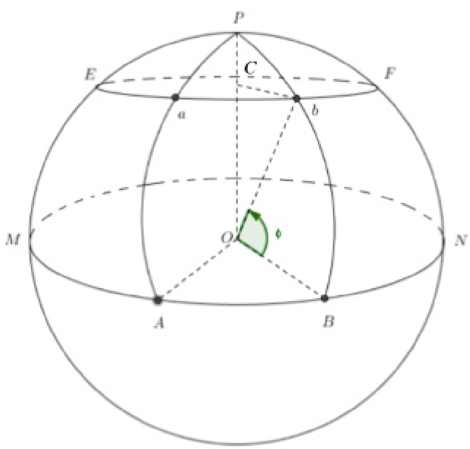
Relação entre arcos

Serão estabelecidas algumas relações entre os elementos no globo terrestre, para melhor comparar as distâncias na superfície esférica e poder realizar medidas de percursos em longas distâncias na superfície da Terra. Assim, a seguir vamos definir e estabelecer uma relação entre o arco de paralelo e o correspondente arco do Equador.

O arco de paralelo é a menor porção do círculo correspondente ao paralelo (círculo perpendicular ao eixo-polar, distinto do Equador), enquanto arco do Equador é a menor porção do círculo correspondente ao Equador.

É importante perceber que, como os meridianos convergem nos polos, os mesmos se interceptam por vários paralelos e, à medida que aumenta a latitude de um paralelo, é menor a distância entre dois meridianos. É possível estabelecer uma relação entre um arco de paralelo e o correspondente arco do Equador. Na Figura 7, tem-se um arco *ab* do paralelo, ao arco *AB* situado no Equador:

Figura 7 - Arco paralelo.



Fonte: Carvalho (2014, p. 38).

Temos ainda, $OP = OB = OA = R$ raio da Terra, onde OP é perpendicular a Cb raio do paralelo. Com isso, o triângulo ΔCOb é retângulo em C, e podemos escrever:

$$Cb = Ob \cdot \text{sen}\,(90^\circ - \varphi) \qquad \text{(I)}$$

ou

$$Cb = Ob \cdot \cos\,(\varphi). \qquad \text{(II)}$$

Além disso,

$$\frac{\textit{arco de paralelo ab}}{\textit{arco do Equador AB}} = \frac{\textit{raio do paralelo Cb}}{\textit{raio da Terra OB}} \qquad \text{(III)}$$

ou

$$\frac{Ab}{AB} = \frac{Cb}{OB} \qquad \text{(IV)}$$

Como $OB = Ob$, combinando (II) e (IV), temos:

$$ab = AB \cdot \cos(\varphi). \qquad \text{(V)}$$

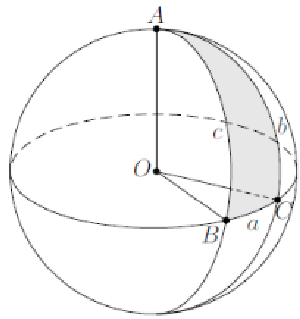
Triângulos esféricos

O estudo dos triângulos esféricos tem uma notável importância na Geometria Esférica, pois através deles podemos encontrar, por exemplo, a distância entre dois pontos quaisquer na superfície esférica. Iremos agora definir e estabelecer algumas relações entre os elementos deste triângulo.

Definição 2. Sejam A, B e C três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes ao mesmo círculo máximo. A figura formada pelos arcos de círculos máximos que une esses pontos dois a dois é denominado triângulo esférico (vide Figura 8).

Na Figura 8, os lados BC, AC e AB do triângulo esférico são escritos, respectivamente, por a, b e c, e medidos pelos ângulos subentendidos por eles no centro da esfera (podendo ser em graus ou radianos), sendo definido pelo ângulo do setor circular determinado por dois vértices e o centro da esfera. E, os ângulos do triângulo *ABC* são os ângulos esféricos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, que podem ser reescritos como $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$. Além disso, os triângulos esféricos possuem três: alturas, bissetrizes internas, medianas, com a mesma definição dos triângulos planos.

Figura 8 - Triângulo esférico.



Fonte: Carvalho (2014, p. 39).

Propriedades: triângulos esféricos

(1) A soma de duas faces quaisquer de um ângulo triedro é maior do que a terceira face;
(2) A soma dos três lados de um triângulo esférico é maior que 180º e menor que 360º, ou seja, 0 < *a* + *b* + *c* < 360º;
(3) A área de um triângulo esférico é dada pela fórmula:

$$S = R^2[(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) - \pi] = R^2 \cdot E$$

sendo *E* o excesso esférico e representa o valor que a soma dos ângulos internos do triângulo esférico excede a 180º;
(4) A soma dos três ângulos internos de um triângulo esférico é maior que dois ângulos retos (180º) e menor que seis ângulos retos (540º),

ou seja,

$$\pi < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\pi$$

(5) Dois lados de um triângulo esférico são iguais se, e somente se, os ângulos opostos também são iguais:

$$a = b \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$$

(6) Ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice-versa;
(7) A soma de dois ângulos é menor que o terceiro acrescido de 180º e a diferença é menor que o suplemento do terceiro:

$$\widehat{A} + \widehat{B} < \widehat{C} + 180^o$$
$$\widehat{A} - \widehat{B} < 180^o - \widehat{C}$$

Para maiores informações das demonstrações das Propriedades 1-7 considere a Ayres (1954).

Os triângulos esféricos podem ser classificados quanto à medida dos ângulos e dos lados. Quanto à medida dos ângulos, temos: retângulo (um ângulo reto); birretângulo (dois ângulos retos); trirretângulo (os três ângulos retos). Quanto à medida dos lados, temos: retilátero (um lado medindo 90º); birretilátero (dois lados medindo 90º); trirretilátero (cada um dos lados medindo 90º).

É possível notar que se um triângulo esférico é trirretângulo então é também trirretilátero e ocupa exatamente a oitava parte da superfície esférica. Uma das características da Geometria Esférica que a mais diferencia da Geometria de Euclides é o fato de não existir a noção de semelhança, ou seja, não é possível num plano esférico desenhar duas figuras que tenham a mesma proporção. Nesse caso, não se pode encontrar um triângulo esférico que seja maior do que outro, e que tenha os mesmos ângulos.

Dessa forma, a Geometria Esférica não admite a semelhança entre triângulos, apenas congruência. Pois, a área de um triângulo esférico depende apenas da soma dos seus ângulos internos. Consequentemente, na esfera todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área; logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

Como a Geometria Esférica não admite a semelhança de triângulos, as fórmulas envolvendo os lados (arcos) dos triângulos esféricos são distintas das usuais. Neste caso, devemos recorrer a trigonometria esférica a qual admite a seguinte proposição:

Proposição 1. Fórmula Fundamental:

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \mathrm{sen}(b)\,\mathrm{sen}(c)\cos(\hat{A}) \qquad \text{(VI)}$$

onde a, b e c são os lados do triângulo esférico e $\hat{A}$ o ângulo esférico correspondente a Figura 8.

Essa fórmula é assim chamada porque, a partir dela, todas as demais fórmulas para os triângulos esféricos são obtidas. Esta fórmula (VI) relaciona os lados (a, b e c) do triângulo esférico, e sua demonstração pode ser encontrada em Carvalho (2014, p. 44).

O Teorema de Pitágoras

O título acima sugere uma pergunta: como será o Teorema de Pitágoras na Geometria Esférica? O Teorema de Pitágoras é derivado dos postulados da Geometria Euclidiana (relação esta que envolve os lados de um triângulo retângulo plano) e, de fato, a versão Euclidiana não é válida nas Geometrias não-Euclidianas. Portanto, não temos o Teorema de Pitágoras na Geometria Esférica.

Podemos estabelecer uma relação entre os lados de um triângulo esférico retângulo a partir da fórmula fundamental (VI), que terá uma notação diferente da Euclidiana. Caso consideremos um triângulo esférico retângulo em A, a fórmula fundamental (VI) terá a seguinte notação:

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c).$$

Sendo esta a relação que envolve os lados do triângulo retângulo esférico.

Aplicações da Geometria Esférica

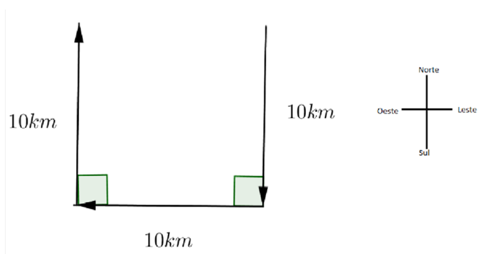
A fim de motivar a introdução das Geometrias não-Euclidianas na Educação Básica, mais especificamente a Geometria Esférica, serão propostas algumas aplicações, ou seja, algumas tarefas direcionadas a estudantes do ensino fundamental ou médio. As mesmas são extraídas de Polya (1995), Coutinho (2001), Valdeni e Thomaz (2007) e Ayres (1954), trazendo comparações com a Geometria Euclidiana, a fim de perceber algumas diferenças. Assim segue:

Tarefa 1. Um urso parte do ponto P e percorre um quilômetro no sentido sul. Em seguida, muda de rumo e anda um quilômetro no sentido leste. Finalmente, muda outra vez de rumo, percorre um quilômetro no sentido norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor do urso? Nesta situação são pedidos os seguintes itens:

1. Desenhar numa folha de papel o caminho percorrido pelo urso.
2. De acordo com a situação acima é possível que o urso volte ao ponto de partida? Anote suas conclusões.
3. Desenhar numa bola de isopor o caminho percorrido pelo urso.
4. Analisando o caminho desenhado na bola de isopor: é possível para o urso voltar ao mesmo ponto de partida?

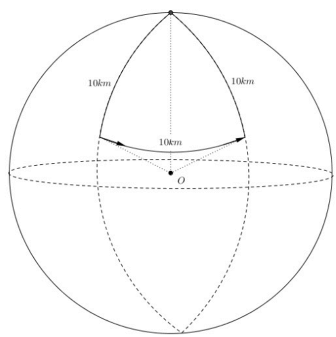
A Tarefa 1, além de fazer conexões com a Geografia sobre Pontos Cardeais (Norte, Sul, Oeste e Leste), procura refletir sobre a nossa percepção a respeito das superfícies plana e esférica gerando assim, um debate sobre a representação do Globo Terrestre e do plano euclidiano. No caso da folha de papel (Figura 9), é possível perceber que sempre ficarão duas retas paralelas, enquanto na bola de isopor (Figura 10) os círculos máximos irão encontrar-se nos polos. Tal situação só é possível na Geometria Esférica, onde o urso parte do polo norte e a cor do urso é branca.

Figura 9 - Problema 1 na folha de papel



Fonte: Carvalho (2014, p. 50)

Figura 10 - Problema 1 na bola de isopor



Fonte: Carvalho (2014, p. 50)

Tarefa 2. Construa as figuras, como indicado abaixo:

1. Desenhe um triângulo qualquer numa folha de papel e com um transferidor meça seus ângulos e anote os resultados.
2. Desenhe um triângulo qualquer numa bola de isopor e com um transferidor meça seus ângulos e anote os resultados.

Na Tarefa 2, além de comparar o triângulo nas duas superfícies, é possível observar que a soma dos ângulos do triângulo esférico é maior que 180º.

A próxima tarefa mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, além de ser maior que 180º, não é constante.

Tarefa 3. Construa com fios elásticos um triângulo na superfície da bola de isopor. Faça as conjecturas das situações abaixo.

1. O que acontecerá com os ângulos se afastarmos progressivamente os vértices?
2. Quanto medirá os ângulos quando se inscreverem sobre um equador da esfera?
3. Quanto medirá a soma desses ângulos?

Esta atividade propõe conjecturar e comparar os resultados obtidos, e entender melhor as propriedades da soma dos ângulos internos dos triângulos esféricos.

Tarefa 4. Utilizando uma bola de isopor, desenhe dois círculos máximos perpendiculares e desenhe um terceiro círculo máximo perpendicular aos dois já construídos.

1. Em quantos triângulos a bola ficou dividida?
2. Quanto mede cada ângulo desses triângulos?
3. Qual a soma dos ângulos internos desses triângulos?
4. Como é classificado esse triângulo esférico de acordo com seus lados e seus ângulos?

Nessa situação é necessário relembrar noções de perpendicularismo, além de propor uma discussão sobre a classificação dos triângulos esféricos.

Tarefa 5. Dois navios, ambos na latitude 23º N, estão afastados um do outro 420 milhas marítimas. Se os dois navios, com a mesma velocidade, navegam rumo ao norte, 1.927 milhas, qual a nova distância entre eles depois do percurso?

Para desenvolver este problema é necessário o conhecimento da relação entre o arco do círculo máximo e um arco paralelo ao mesmo. Observando as informações do problema, temos que a distância de 1.927 milhas percorridas pelos navios que equivale a um arco de meridiano de 32º 07', o que podemos escrever:

• Latitude de saída: 23º 00' *N*
• Arco navegado ou $\Delta\varphi$= 32º 07' *N*;
• Latitude final: 55º 07'*N*

Como os navios na saída estavam no paralelo 23º, o correspondente arco do Equador *XY* em milhas vem a ser:

$XY = 420 \cdot \sec(23^{o}) \Rightarrow XY = 420 \cdot 1{,}08636 \Rightarrow XY = 456{,}27.$

A nova distância procurada entre eles é dado por:

$x = 456{,}27 \cdot \cos(55^{o}\ 07') \Rightarrow x = 456{,}27 \cdot 0{,}57191 \Rightarrow x = 261$ milhas.

Tarefa 6. Considere as cidades de Huambo, na Angola, África, e Cruz das Almas, na Bahia, Brasil cujas coordenadas são:

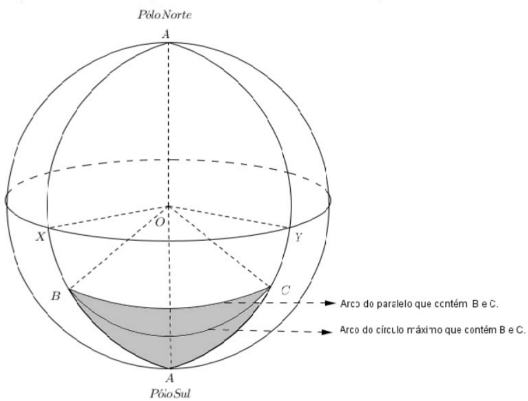
Quadro 1: Coordenadas Geográficas de Huambo e Cruz das Almas

Cidade	Latitude	Longitude
Huambo	12º46'S	15º44'E
Cruz das Almas	12º40'S	39º06'W

Fonte: Carvalho (2014, p. 56)

Suponha agora que as duas cidades estejam na mesma Latitude 12º40'S, consequentemente, estarão em um mesmo paralelo. A partir dessas informações, encontre a distância entre essas duas cidades. Faça uma conjectura e, após fazer os cálculos necessários, discuta os resultados.

Figura 11 - Comparando distâncias na superfície esférica



Fonte: Carvalho (2014, p. 57)

Basta considerar o triângulo esférico (Figura 11), onde o ponto *A* está situado no polo Sul, e o ponto *B* é a localização de Cruz das Almas, enquanto o ponto *C* é a localização de Huambo. Logo:

- O lado *AB* = c = 90º – 12º40' = 77º20';
- O lado *AC* = b = 90º – 12º 40' = 77º 20';
- O ângulo *A* = 15º44' + 39º66' = 55º50'.

Agora, utilizando a fórmula (VI), obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(b)\cos(c) + \text{sen}(b)\,\text{sen}(c)\cos(A) \\ &= \cos(77^\circ\ 20')\cos(77^\circ\ 20') + \text{sen}(77^\circ\ 20')\,\text{sen}(77^\circ\ 20')\cos(55^\circ\ 50') \\ &= 0{,}219278624 \cdot 0{,}219278624 + 0{,}97566228 \cdot 0{,}97566228 \cdot 0{,}561602106 \\ &= 0{,}048083114 + 0{,}534598527 \\ &= 0{,}582681643, \end{aligned}$$

de modo que $a = 54{,}36062298$, ou seja, $a = 54^\circ\ 22'$, que equivale a 3.262 milhas, ou 6.041,22 km.

É possível notar que tais tarefas possam permitir que os estudantes apresentem uma reflexão sobre os limites da Geometria Euclidiana em outros contextos. Oportunizando reflexões e discussões acerca da Matemática, em particular da Geometria. Vale ressaltar, que tais conceitos não necessita conhecimentos da Matemática superior.

Conclusão

No desenvolvimento do conhecimento matemático, a história mostrou grandes transformações matemáticas acessíveis aos estudantes da Educação Básica. Desta forma, evidenciar a abordagem das Geometrias não-Euclidianas para a Educação Básica significa proporcionar aos estudantes o acesso a outras ideias, com a finalidade de ampliar seu conhecimento e pensamento geométrico.

A título de exemplo, este trabalho apresenta um breve relato das discussões acerca do quinto postulado de Euclides que perduraram por séculos, demonstrando os esforços empregados de vários matemáticos com o intuito de demonstrá-lo. Mesmo que sem êxito tais discussões criaram possibilidades para outras geometrias e possibilitaram uma nova maneira de analisar o mundo não-Euclidiano. Desta forma, esses fatos históricos contribuíram para as mudanças ocorridas na Geometria de um modo geral.

A fim de fixar o entendimento do texto, tarefas foram analisadas com a finalidade de compreender os conceitos da Geometria Esférica fazendo, na medida do possível, comparações desta com a Geometria Euclidiana Plana. Além disto, a manipulação de materiais como o globo terrestre, a folha de papel, a bola de isopor, dentre outros utilizados facilita o entendimento dos conceitos empregados, aumentando a possibilidade de abstração dos modelos geométricos em questão.

Vale ressaltar que o docente, em qualquer nível escolar, deve ter um conhecimento profundo e amplo do conteúdo a ser ministrado em sala de aula, buscando conhecer sua origem e possíveis aplicações. Muitas vezes, os professores e estudantes tem contato com a Geometria apenas pelos livros didáticos que, em alguns casos, abordam os conteúdos de forma superficial, além de apresentarem erros nas definições, conceitos ou aplicações (LIMA, 2001). Assim, a busca do professor em conhecer mais e melhor, abre os horizontes dos alunos, fazendo-os refletir, inferir outros conceitos, construir conhecimento.

Referências

ALVES, S. A Geometria do Globo Terrestre. **Revista do Programa de Iniciação Científica.** OBMEP-IMPA, Rio de Janeiro-RJ, 2010.

AYRES, F. J. **Trigonometry of Plane and Spherical.** New York: Schaum Publishing co, 1954.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo-SP: Edgard Blucher/Edusp, 2010.

CARVALHO, O. A**. Uma abordagem das Geometrias não-Euclidianas na Educação Básica**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática). Cruz das Almas, UFRB, 2014.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 2001.

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2004.

GARBI, G. G. **A rainha das Ciências**: um passeio maravilhoso mundo da matemática. 5. ed. São Paulo-SP: Editora Livraria da Física, 2010.

LIMA, E. L. **Exame de Textos**: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2001.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 1995.

ROCHA, R. B. **Geometrias Não-Euclidianas**: Proposta de Abordagem Aplicável ao Ensino Básico. Salvador-BA: UFBA - IM - SBM - Profmat, 2013.

RONAN, C. A. **História ilustrada ciência da Universidade de Cambridge**. Volume 4. Rio de Janeiro-RJ: Jorge Zahar Editora, 2001.

SANTOS, A. V. **História das ciências**: uma abordagem introdutória. Cachoeira-BA: Edição do Mestrado em Ciências Sociais da UFRB, 2010.

TENÓRIO, R. M. et al. **Aprendendo pelas raízes: alguns caminhos da matemática na história**. Salvador- BA: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1995.

VALDENI, S.; THOMAZ, M. L. **Geometria não-euclidiana e geometria esférica**. O professor e os desafios da escola pública paranaense. Paraná: Secretaria de Educação, 2007.

WOLFE, H. E. **Introduction to non-euclidian geometry.** New York: The Dryden Press, 1945.

Estratégias de geometria não Euclidiana com fractais no Ensino Médio

Janio Paim de Jesus
Ariston de Lima Cardoso
Genilson Ribeiro de Melo

Introdução

Este artigo foi fruto da dissertação de mestrado, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), na Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), campus Cruz das Almas. Dessa forma, o referido escrito tem como objetivo, por meio de uma sequência didática, introduzir na Educação Básica a Geometria Não Euclidiana (GNE) com ênfase na Geometria Fractal.

Esse estudo se justifica por três situações: (a) a não existência da indicação do ensino da Geometria Não Euclidiana na Educação Básica pelos documentos oficiais do estado da Bahia, tendo apenas os axiomas e postulados da Geometria Euclidiana como fundamentos para o ensino da geometria; (b) mostrar aos estudantes a presença de figuras na natureza com propriedades e características que fogem aos padrões da Geometria Euclidiana; (c) conceber que a utilização das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) na educação é uma ferramenta poderosa no processo de ensino aprendizagem.

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

A criança ao se relacionar com o meio em que vive se depara com diversos tipos de linguagem. Uma das linguagens mais significativas é a da forma. Desse modo, através do tato, a criança tenta manipular alguns corpos. É nesse primeiro contato que a criança inicia o aprendizado do mundo das formas.

Nesse sentido, a orientação contida nos PCN no tocante ao ensino da Geometria na Educação Básica mostra que:

> [...] e esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 39).

Sendo assim, os PCN pressupõem que o professor desenvolva atividades que visem proporcionar a interação do estudante com o meio em que vive, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental.

Orientações Curriculares – Bahia

No estado da Bahia, no ano de 2015, a Superintendência de Desenvolvimento da Educação Básica, no nome da Secretaria Estadual de Educação, organizou um documento que versava sobre os conteúdos para o Ensino Médio na área da Matemática. Neste documento, fica claro a concepção de aprofundar o conteúdo referente a geometria no Ensino Médio, quando ele cita os eixos integradores do conhecimento matemático:

> No Eixo 2, Modelagem Geométrica no Plano e no Espaço, parte-se da compreensão de que o desenvolvimento do conhecimento geométrico começa nas séries iniciais, mas somente nas séries finais do Ensino Fundamental o(a) estudante relaciona às propriedades geométricas, e no Ensino Médio surge a maioria das situações de raciocínio hipotético-dedutivo (BAHIA, 2015, p. 13).

Nesse sentido, é necessário que o professor, do segmento do Ensino Médio, possa estimular os estudantes no desenvolvimento de suas habilidades e, sempre que possível, estabelecer um meio para que o conhecimento possa ser expandido.

Diretrizes Curriculares – Paraná

A proposta do trabalho da disciplina de Matemática contida nas Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná traz como conteúdos estruturantes da disciplina, que eles definem como sendo os conteúdos de grande amplitude, cinco grandes blocos: Número e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação.

Segundo as Diretrizes do estado do Paraná (PARANÁ, 2008, p. 55), no tópico das "Geometrias", um dos seus pontos é:

- Noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais.

Por esse tópico podemos perceber que, já no Ensino Fundamental é possível a introdução da geometria Não Euclidiana na Educação Básica. Como o nosso foco é o Ensino Médio, sobre isso, as Diretrizes apresentadas sugerem que sejam aprofundados os conhecimentos da geometria euclidiana (Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica), com os seus teoremas e suas respectivas demonstrações.

Geometria Euclidiana (GE)

A coleção "Os elementos", nos seus treze livros, traz quase todo o conhecimento matemática até então produzido. Segundo Hygino (2001), Euclides teve uma atenção especial à Geometria, ao afirmar que "Os Elementos dedicam um bom espaço à teoria dos números (três livros), mas o enfoque geométrico permeia toda a obra". Euclides representava os números por segmentos de retas.

Segundo Hygino (2001), Euclides indicou os seguintes axiomas e postulados:

Axiomas

- Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
- Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
- Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Postulados

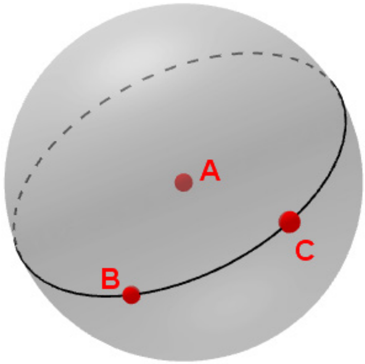
- Existe uma única reta contendo dois pontos dados
- Todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em todas as direções.
- Existe uma circunferência com quaisquer centro e raio dados.
- Todos os ângulos retos são iguais entre si.
- Se uma reta intercepta outras duas retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se estendidas indefinidamente, interceptam-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Mesmo naquela época, sendo os axiomas e postulados tidos como verdade, o quinto postulado levantou a dúvida de vários matemáticos. Sendo assim, a busca pela prova do conhecido como “5º Postulado de Euclides” ou “O Postulado das Paralelas” foi trabalho de alguns Matemáticos. A partir de então, temos a descoberta das Geometrias Não euclidianas.

Geometria Não Euclidiana (GNE)

Verdades aceitas na GE, como, por exemplo, a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, pode não ser aplicada nas GNE – por exemplo, a menor distância entre os pontos B e C da esfera de centro A e raio $\overline{AB}$, será o arco $\widehat{BC}$ de centro A, contida no círculo maior desta esfera (Figura 1).

Figura 1 - Distância entre dois pontos da esfera



Fonte: Construída pelo autor

Caso estivéssemos na G.E., a menor distância em questão seria o segmento de reta $\overline{BC}$.

Dentre as Geometrias Não Euclidianas, temos a ***Geometria Esférica*** que é uma área que pode ser trabalhada na Educação Básica sem muitos problemas, por ter como base uma figura comum aos estudantes e, de certa forma, poder encontrar modelos dentro do contexto dos alunos.

Outra Geometria Não Euclidiana que pode ser aplicada na Educação Básica é a Geometria *do Taxista*. Para iniciar esse tema imagine a seguinte situação: "Uma pessoa quer se locomover de carro da sua casa, localizada no ponto A, até a casa de sua mãe, que fica no Ponto B. Através do mapa das ruas, qual será o menor caminho possível?".

Será que podemos usar a tão conhecida máxima da Geometria Euclidiana que diz que "a menor distância entre dois pontos é uma reta"? Obviamente, não. Casos como este podem ser usados como motivadores para introduzir a Geometria do taxista.

A geometria dos fractais

A Geometria Euclidiana é pautada no estudo de formas regulares, como por exemplos, os polígonos e as cônicas. O matemático, polonês que viveu na França, Benoit Mandelbrot iniciou o seu trabalho com os fractais no ano de 1958, na *International Business Machines* (IBM). Segundo Mandelbrot:

> Eu cunhei a palavra **fractal** do adjetivo latino **fractus**. O verbo latino correspondente **frangere** significa **quebrar**: criar fragmentos irregulares. Portanto, é considerável **-** e quão apropriado para as nossas necessidades! **-** que, além de significar **fragmentado** (como em **fração** ou **refração**), **fractus** pode também significa **irregular**, estando ambos os significados preservados em **fragmento”** (MANDELBROT, 1982, p. 17, grifos do autor).

Ao criar a palavra fractal, ele sugere que sejam partes irregulares de um todo. Além disso, ele percebe que algumas figuras possuem a propriedade da *auto similaridade*, na qual as partes do todo possuem as mesmas características do todo. Na natureza é possível encontrar diversas formas com tal propriedade, como por exemplo, uma árvore, como o todo, e os seus galhos, e suas ramificações, como as partes.

Segundo Siqueira (2005, p. 1), uma definição simples de fractal é que “são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo, apresentando auto semelhança e complexidade infinita”. Ele acrescenta que na auto similaridade, o mesmo objeto visto em diferentes escalas, mantém as características iniciais; a complexidade infinita se justifica, pois são figuras que podem sempre ser aumentadas ou diminuídas, nunca conseguiremos reproduzi-las completamente.

Alguns fractais famosos

No desenvolvimento do estudo dos fractais alguns matemáticos criaram fractais geométricos, os quais levaram os seus nomes.

Veremos nesse tópico o Triângulo de Sierpinski, a Curva de Koch e o Conjunto de Cantor.

Outro matemático polonês, Waclaw Sierpinski (1882 - 1969), a exemplo de Mandelbrot, construiu o **Triângulo de Sierpinski**. Essa figura é definida como um fractal, pois possuem as propriedades de auto similaridade, infinitude e dimensão não inteira.

O triângulo de Sierpinski é obtido da seguinte forma:

- Seja um triângulo equilátero num plano qualquer;
- Com vértices nos pontos médios dos lados do triangulo inicial, constrói-se um outro triângulo equilátero e, retira-o da figura.
- Na figura vasada resultante, repete-se os dois passos iniciais infinitas vezes.

Dessa forma, obtemos o fractal desejado, conforme a sequência da Figura 2. Note que esta figura, como dito antes, ao se considerar uma parte, temos que as partes são semelhantes à figura inicial e, além disso, pode-se sempre encontrar os pontos médios dos lados de um triângulo e traçar outros triângulos no seu interior, tornando-a uma figura que tende para o infinito. Veremos mais adiante, como determinar a sua dimensão.

Figura 2 – Triângulo de Sierpinski

Fonte: Triângulo

Fractais Naturais

Existem outros fractais que são encontrados na natureza, os chamados Fractais Naturais. Para a introdução da Geometria Não

Euclidiana na Educação Básica através da Geometria dos Fractais, o uso dos fractais naturais pode favorecer o interesse dos estudantes pelo conteúdo.

Por exemplo, no leito de um rio (Figura 3), podemos perceber as propriedades de infinitude (tem-se a ideia que a linha que delimita o rio é infinita), a propriedade de auto semelhança (analisando parte do leito, esta se assemelha ao todo) e a dimensão não inteira (nota-se que em determinados espaços não fica bem definido se temos uma linha ou um contorno que se aproxima de ser uma superfície).

Figura 3 - Leito do rio

Fonte: Curiosidades (2014)

Dimensão Fractal

Em seus estudos, Mandelbrot percebeu que algumas situações não estavam bem definidas no espaço euclidiano, o que fez com que fossem usados os estudos do matemático alemão Felix Hasudorff (1868 - 1942) no campo da topologia e do matemático russo Abram Besicovitch (1891 - 1970) que já trabalhava com dimensões não inteiras.

Dessa forma, Mandelbrot desenvolveu um modo para determinar a dimensão de um fractal, chamada de **Dimensão Fractal** ou **Dimensão de Hausdorff-Besicovitch,** calculado pela seguinte fórmula:

$$k = n^D \leftrightarrow D = \frac{\ln(k)}{\ln(n)}$$

onde *k* é a quantidade de partes iguais que foi dividida a figura; *n* é o comprimento de cada pedaço em relação ao todo e *D* é a dimensão aproximada da figura.

Sequência Didática dos Fractais (SDF)

Para que tenhamos um bom resultado na introdução da Geometria Não Euclidiana na Educação Básica, em específico, no Ensino Médio, propomos uma sequência didática, que segundo alguns autores que veremos a seguir, contribui significativamente para o processo de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, a sequência didática que apresentaremos, além de utilizar recursos usuais de sala de aula (quadro, pincel, caderno), trará o uso de recursos computacionais para que os estudantes possam interagir com o conteúdo, uma vez que esses sujeitos estão em contato com diversos tipos de tecnologias no seu cotidiano. Os PCN destacam que "O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades" (1997, p. 35).

Utilizando da literatura, onde já existem *softwares* livres que realizam construções de fractais, medições de dimensões e de coeficientes que caracterizam o tipo de fractal, identificamos dois *softwares* para o desenvolvimento deste estudo: o *FractalCore* e o *Dood.al*. O primeiro possui um banco de fractais bem definidos, e conhecidos mundialmente, onde as alterações de iterações proporcionam a análise numérica das dimensões e da auto similaridade, conceitos fundamentais e de difícil relação ensino-aprendizagem para os discentes de níveis iniciais da Geometria Não Euclidiana. O segundo *software* possui uma característica qualitativa e intuitiva na formação das imagens, trazendo fractais com o enriquecimento de cores e estruturas de fácil utilização, ampliando a interface e a usabilidade dos estudantes de modo motivacional para o estudo da Geometria Não Euclidiana, tornando-a prazerosa e investigativa. Contudo, o manuseio destes, requerem algumas informações e configurações iniciais de suas ferramentas.

O aplicativo ***FractalCore*** é um *software* livre, e só roda em sistemas operacionais de 32 *bits*, e será utilizado nesse estudo com o objetivo de ilustrar o cálculo da *Dimensão de Hausdorff*. O *FractalCore* permite que, a partir de um banco de dados com alguns fractais pré-formatados, possamos fazer as iterações que desejarmos, observar as propriedades que caracterizam os fractais. Além disso, o *software* que o usuário faça algumas alterações nas cores das figuras geradas.

Ao acessar o aplicativo, o usuário terá duas janelas, uma para as configurações e outra para visualização dos fractais gerados. Em seguida, na janela de configuração, o usuário deverá entrar no item "*File*" da barra de ferramenta e selecionar "*Load"* para abrir a pasta na qual se encontram os fractais pré-montados. Após escolher o fractal desejado, o usuário poderá fazer as iterações que desejar no ícone "*Iterations*". Dessa forma, o usuário terá, na janela de visualização, a figura criada com as iterações que efetuar.

Já o segundo aplicativo, usado como recurso computacional nesse trabalho, é o *software* chamado *Dood.al* (THAPEN, 2014). Do mesmo modo que o primeiro é um *software* livre, e está disponível apenas no modo online. Dispondo de uma *interface* amigável, permite ao usuário que gere fractais a partir de outras figuras e suas iterações.

As ferramentas do ***Dood.al*** permitem que o usuário determine a quantidade de iterações, clicando no botão "*add frame*"; faça as manipulações que ele desejar, movendo as caixas; altere a resolução da imagem, na ferramenta "*resolution*"; configure as cores do seu fractal, nos botões "*paint tools*".

Após a escolha desses dois recursos computacionais que visam criar um ambiente de interação com os estudantes, cada um deles com o seu objetivo nesta aplicação, apresentaremos como foi organizada e aplicada a sequência didática em uma turma do Ensino Médio, que tinha como objetivo principal a introdução das Geometrias Não Euclidianas no ensino Médio, com o enfoque na Geometria dos Fractais.

Aplicação da Sequência Didática

A atividade foi desenvolvida no Centro Estadual de Educação Profissional em Controle e Gestão do Nordeste Baiano Pedro Ribeiro Pessoa, na cidade de Catu. A turma selecionada para a aplicação da sequência didática foi a do 2 ano do curso Técnico em Meio ambiente, composta por 18 estudantes. A turma foi informada uma semana antes da aplicação da atividade, quais eram os seus objetivos e qual seria o tema da aula, ficando acertado que a aula seria no dia 20 de fevereiro de 2017, no turno da manhã, com previsão para 4 aulas (50 minutos cada aula).

Como ***objetivo geral***, esta sequência didática espera que o estudante possa entender a Geometria Não euclidiana através do estudo da Geometria dos Fractais como elemento motivador.

Já os ***objetivos específicos***, pretendia que os envolvidos pudessem:

- Perceber que algumas situações do cotidiano não podem ser explicadas pela geometria "tradicional";
- Definir a Geometria Euclidiana, apresentando alguns de seus axiomas e os cinco postulados;
- Introduzir as Geometrias Não Euclidianas, ressaltando as situações em que os Postulados de Euclides não se aplicam;

- Apresentar a Geometria dos Fractais, expondo alguns fractais famosos e alguns fractais naturais, com as suas respectivas propriedades;
- Utilizar o *software FractalCore* para determinar as dimensões de alguns fractais;
- Utilizar o *software Dood.al* para a construção de alguns e discursão dos mesmos;
- Analisar a aprendizagem dos estudantes pós-realização da Sequência Didática e suas contribuições no estudo da Geometria Não Euclidiana.

Na aplicação da sequência didática, percorremos o seguinte caminho metodológico: iniciamos a aula com uma motivação que pretendeu mostrar, através de uma situação problema, as dimensões inteiras da Geometria Euclidiana e perceber que nem toda figura poderá ser expressa por uma dimensão será inteira; Como os estudantes não conheciam a história de Euclides de Alexandria, de modo sucinto, fizemos uma abordagem histórica de sua vida, enfatizando os seus livros da coleção "Os Elementos" quanto às questões dos seus postulados; em seguida, mostramos a existência de algumas geometrias não euclidianas como a Esférica, a do Táxi e a Fractal, especificando o ponto em que os postulados de Euclides não convém para cada caso; após isso, discutimos os aspectos históricos e conceituais acerca da Geometria dos Fractais, mostrando alguns fractais famosos e fractais naturais e, exemplificaremos como calcular a dimensão de *Hausdorff* de uma figura; Como atividade prática, usamos o *software FractalCore* para calcular a dimensão de alguns fractais e o *software Dood.al* para a construir alguns fractais livres; por fim, abrimos o espaço da aula para discussões sobre o tema trabalhado.

Como ***recurso didático***, fizemos uso da lousa, da caneta pincel, do apagador, da calculadora, do projetor, de vídeo tutorial do *software*, de computadores com internet e dos *softwares Dood.al* e *FractalCore*.

Em relação à ***avaliação*** da atividade, esta foi verificada durante o processo da aplicação da atividade e nos momentos em que os alunos fizeram as suas contribuições. Além disso, após a aula os estudantes responderam um questionário sobre a aprendizagem do tema.

Resultados

A parte inicial da aula correu naturalmente, posto que o público alvo foi uma turma do 2 ano do Ensino Médio e, grande parte dos estudantes, já dominavam as noções da geometria, como questões, por exemplo, que uma folha de papel ofício possui duas dimensões (comprimento e largura). As noções de uma, duas e três dimensões eles tinham bem desenvolvido. Apenas desconheciam o fato de que tais conceitos levantados faziam parte da Geometria Euclidiana. Na verdade, os estudantes nunca tinham escutado falar do matemático Euclides de Alexandria. Em relação à apresentação dos Postulados de Euclides, a turma teve uma boa compreensão a partir dos exemplos expostos de cada um dos cinco postulados em questão.

Na situação em que foi amassada uma folha de papel ofício e questionado aos estudantes sobre a nova dimensão, obtivemos respostas no mínimo curiosas. Como por exemplo, “a folha passou a ter dimensão zero”, “a folha estará em outra dimensão” ou ainda, “a folha terá dimensão infinita”. Os estudantes responderam afirmativamente, quando questionados se a nova dimensão da folha de papel amassada seria maior que 1 (um) e menor que 2 (dois). Dessa forma, os estudantes puderam inferir que a nova dimensão da folha amassada seria um número decimal, compreendido entre 1 e 2.

Ao introduzir as Geometrias Não Euclidianas, com algumas negações dos Postulados de Euclides e exemplos da Geometria Esférica e da Geometria do Taxi, os estudantes perceberam as possibilidades e percepções diferentes que eles poderiam introduzir nos seus estudos.

Com a Geometria dos Fractais, fizemos uma breve abordagem histórica, falando do seu criador Benoit Mandelbrot e, foi discutido as propriedades dos fractais, a auto similaridade, a infinitude e a dimensão fracionária. As duas primeiras propriedades, os estudantes conseguiram perceber facilmente ao observar alguns fractais famosos e alguns fractais naturais. A dificuldade foi trabalhar com dimensão não inteira. A relação de Hausdorff foi apresentada e, ao perceberem a presença do conteúdo dos logaritmos, alguns estudantes tiveram algum receio. Ao notarem que, após a identificação das variáveis, poderiam utilizar a máquina de calcular para determinar o expoente (logaritmo), a aula ficou mais tranquila.

Como a parte prática desta aula teve como foco determinar a dimensão aproximada de alguns fractais e, de modo dinâmico, construir alguns fractais, usando os *softwares* para esses fins, os estudantes puderam perceber como as iterações nas imagens geravam os fractais. Para construir alguns fractais, usamos o *software online Dood.al*. O objetivo destas construções foi perceber os efeitos das iterações nas figuras e, de modo lúdico, "brincar" com os fractais. Nessa etapa, como os estudantes possuem muita imaginação e criatividade, além da habilidade com os recursos tecnológicos, passaram grande parte do tempo construindo fractais e fazendo perguntas sobre os nomes das figuras obtidas.

Por fim, foi aplicado um questionário sobre a aprendizagem do estudo dos fractais nesta sequência didática. As perguntas feitas se referiam a itens relacionados aos conhecimentos prévios e aos conhecimentos adquiridos pelos estudantes neste estudo. Destacamos algumas das respostas mais significativas: 100% dos estudantes alegaram desconhecer que a geometria estudada por eles na Educação Básica se tratava da Geometria Euclidiana. Sendo, dessa forma, um ambiente em que impossibilitava os questionamentos acerca dos Postulados de Euclides; 20% dos pesquisados disseram que não conseguiram compreender as propriedades dos fractais, principalmente a dimensão não inteira das figuras. Julgando que a dimensão não poderia ser um número decimal. Nesse aspecto, como foi usado a Relação de Hausdorff para determinar a dimensão aproximada de determinadas figuras, 27% dos estudantes afirmaram que devido ao cálculo envolvendo os logaritmos, tiveram dificuldades. Os demais, afirmaram que o uso da calculadora facilitou a resolução e, compreenderam que a dimensão fractal se refere ao expoente da fórmula utilizada; Em relação ao uso dos *softwares* (*Dood.al* e *FractalCore*) para a construção de fractais, 80% dos estudantes afirmaram que tiveram facilidade, tanto na realização da atividade prática, quanto na visualização das propriedades dos fractais expostos. A habilidade dos estudantes com os recursos computacionais favoreceu à realização da proposta do trabalho; com a justificativa de já existir muitos conteúdos de Matemática no curso, 13% dos estudantes não foram a favor da inserção do conteúdo dos fractais, como foi trabalhada na sequência didática, no currículo do Ensino Médio. Já 87% dos estudantes, por usar apenas um conteúdo já trabalhado no curso e, terem a oportunidade de aumentar seus conhecimentos, concordaram com inclusão do tema.

Conclusão

Temos a certeza da importância em se ter como base a Geometria Euclidiana para o trabalho com a Geometria nas escolas. Mesmo assim, notamos que é possível a implementação de um método para que as geometrias não euclidianas tenham o seu espaço na sala de aula e, por que não, nos livros didáticos. Uma vez que se discuta com os estudantes os cinco Postulados de Euclides e mostre onde existem as falhas, os alunos terão uma base sólida para ingressar os estudos em questão.

Dentre as Geometrias Não Euclidianas mencionadas neste estudo, a escolha de se trabalhar com a Geometria dos Fractais se deu pela natureza das suas características, principalmente para desmitificar a ideia das dimensões inteiras. Além disso, as belas figuras criadas a partir dos fractais podem motivar os estudantes a buscarem as explicações de tais figuras, contribuindo para a sua inserção na Educação Básica.

Por fim, com a aplicação da sequência didática em sala de aula, através do uso de *software* para dinamizar a aula, podemos perceber que os estudantes envolvidos no trabalho, notaram a importância deste conteúdo que mostra que nem todas as formas possuem dimensões inteiras. Além disso, com o uso dos *softwares* puderam ser criadas belas figuras e, como a aplicação da aula foi em uma turma do curso Técnico em Meio ambiente, o fato de poder encontrar na natureza figuras denominadas de fractais, encantaram os estudantes. Os resultados do questionário de aprendizagem na pós-sequência didática, evidenciaram o interesse dos estudantes pelos temas trabalhados e a possibilidade de se inserir as Geometrias Não Euclidianas, por via da Geometria dos Fractais nas escolas de Ensino Médio do estado da Bahia, com o aporte das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC).

Nesse sentido, este trabalho sugere ao professor de Matemática um modo de se trabalhar outras geometrias em sala de aula, potencializando os conhecimentos dos seus estudantes.

Referências

BAHIA. Secretaria da Educação do Estado da Bahia. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio: Matemática**. Salvador: SEC-BA, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio:**

ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC, 1998.

CURIOSIDADES: 9 padrões fractais hipnotizantes encontrados na natureza. **Redação**, 2014. Disponível em: https://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380. Acesso em: 10 fev. 2017.

DOCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, Geometria Plana**. ISBN 85-7056-268-3. São Paulo: Atual, 2001.

MANDELBROT, B. B. ***The fractal geometry of nature***. New York, 1982.

THAPEN, N. Doodal. V1.2b. July, 2014. Disponível em: https://dood.al/. Acesso em: 10 out. 2016.

PARANÁ. Secretaria de Educação do Estado. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: SEED/DEPG, 2008.

SIQUEIRA, R. **Janelas para o Infinito: Exposição de Fractais**. Disponível em: <http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php>. Acesso em: 7 fev. 2017.

TRIÂNGULO de S. *In:* Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski. Acesso em: 10 fev. 2017.

Estudo das funções trigonométricas na roda-gigante

Leila Maria Salomão de Souza
Adson Mota Rocha

Introdução

Por muito tempo a Matemática foi ensinada pelo método tradicional, entendido como "meio utilizado pelo professor para comunicar a matéria e não dos alunos para aprendê-la" (LIBANEO, 1998, p. 64). O currículo tradicional preza pela elegância da Matemática sem se preocupar com novas ideias dos alunos e o principal interesse do professor está em transmitir aquele conhecimento oriundo de matemáticos renomados como Euclides e Newton (KLINE, 1976).

De acordo com a Lei nº 9.394/96, MEC/BRASIL, denominada Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, ver Brasil (1996), o Ensino Médio tem como uma de suas finalidades a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. Partindo desse princípio os currículos são organizados de maneira pela qual os conteúdos não sejam ensinados apenas de forma disciplinar, sem ligação com a realidade ou restrito somente ao que aparece nos livros didáticos.

Um desafio encontrado é escolher o conteúdo a ser trabalhado e sua metodologia. Sobre funções trigonométricas e suas relações, Lima (2012) afirma que:

> Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibrató-

> ria, os quais abundam no universo: movimento dos planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc. (LIMA, 2012, p. 239).

Esta afirmação induz que o estudo das funções trigonométricas não deve ser suprimido do plano de curso escolar pela sua importância em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, Física, Engenharia, Arquitetura e Ciências Biológicas.

Lima (2001) e (2012) informa que dificilmente sobre discussão do conteúdo das funções trigonométricas são abordadas da forma devida no Ensino Médio. O problema é ainda maior quando se trata de funções trigonométricas inversas que na maioria das vezes não são incluídas nos planos de curso.

Este artigo é parte do trabalho da dissertação de mestrado Profmat, que trata de uma proposta de estudo de funções trigonométricas e suas inversas através do GeoGebra (SOUZA, 2015). Nosso objetivo é apresentar uma proposta de estudo dessas funções com um experimento prático e o uso de construções dinâmicas utilizando o *software* GeoGebra. Pretendemos apresentar essas ferramentas para que o professor possa explorá-las em sala de aula e o estudante obtenha uma melhor visualização dos gráficos, podendo relacioná-los com fenômenos da realidade.

A fim de contribuir com o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente, foram elaboradas as Orientações Curriculares para o Ensino Médio em Brasil (2006), criadas através de discussões entre alunos e professores da rede pública, além de representantes da comunidade acadêmica. De acordo com essas orientações, na página 69, diz que o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e à contextualização sociocultural.

Baseando-se nas diretrizes educacionais, relataremos um experimento aplicado numa turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual da Bahia. O relato inclui as etapas de aplicação: planejamento do experimento, tutorial de construção dos gráficos no GeoGebra e parecer de execução na turma.

Planejando o experimento

Durante nossa pesquisa na internet visualizamos interessantes propostas didáticas nas quais o professor pode realizar através de um trabalho investigativo com seus estudantes. No Ambiente Educacional Web, plataforma desenvolvida pela Secretaria de Educação do Estado da Bahia, na qual são organizadas aulas, com o intuito de facilitar o trabalho do professor, podemos encontrar essas propostas devidamente fundamentadas.

Encontramos um experimento com o objetivo de introduzir o conceito de função periódica através de uma roda-gigante construída com materiais recicláveis. O experimento intitulado "*A roda-gigante*" tem como objetivo motivar o estudo de arcos e ângulos, das funções trigonométricas e do conceito introdutório de função periódica. Este material faz parte do portal *M³ Matemática Multimídia*, que contém recursos educacionais em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp para o Ensino Médio de Matemática no Brasil e podem ser encontrados em Soares (2010).

Além do experimento precisamos validar geometricamente os dados coletados pelos alunos, para isso utilizaremos o recurso computacional GeoGebra, o qual pode ser encontrado gratuitamente na internet. De acordo com Giraldo, Caetano e Matos (2014), o uso dessa plataforma enriquece a abordagem do conteúdo e o ensino de Matemática. Com esse recurso diminuiremos o tempo gasto na construção dos gráficos no quadro branco, além da possibilidade de explorar essas funções de forma dinâmica e com animações.

Acreditamos que essa proposta possa motivar os estudantes ao estudo das funções trigonométricas, contextualizando o conteúdo e facilitando o processo de aprendizagem.

Gráficos dinâmicos no GeoGebra

Esta seção visa fornecer um tutorial das construções dos gráficos das funções trigonométricas seno, cosseno, arco seno e arco cosseno, através do GeoGebra, utilizando o movimento de uma roda-gigante.

O GeoGebra é um *software* livre destinado à aprendizagem de conteúdos matemáticos de forma dinâmica, desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg. Possui vários recursos associados às três grandes áreas da Matemática: Geometria, Álgebra e Cálculo. Além disso, tem interconexão e criação de materiais didáticos envolvendo planilhas de Cálculo, gráficos, Probabilidade e Estatística, com o objetivo de apoiar o ensino e aprendizagem em Ciência e Tecnologia.

Para instalar o *software,* acesse o site https://www.geogebra.org clicando na opção *downloads*. Escolha seu dispositivo (*smartphone*, *tablet* ou *desktop*) e o sistema operacional. Execute o pacote de instalação e aguarde até finalizar o processo. Com o GeoGebra instalado, abra-o, clicando no ícone da área de trabalho ou da lista de programas. Neste trabalho a versão utilizada foi a 6.0 para *desktop*.

Roda-Gigante

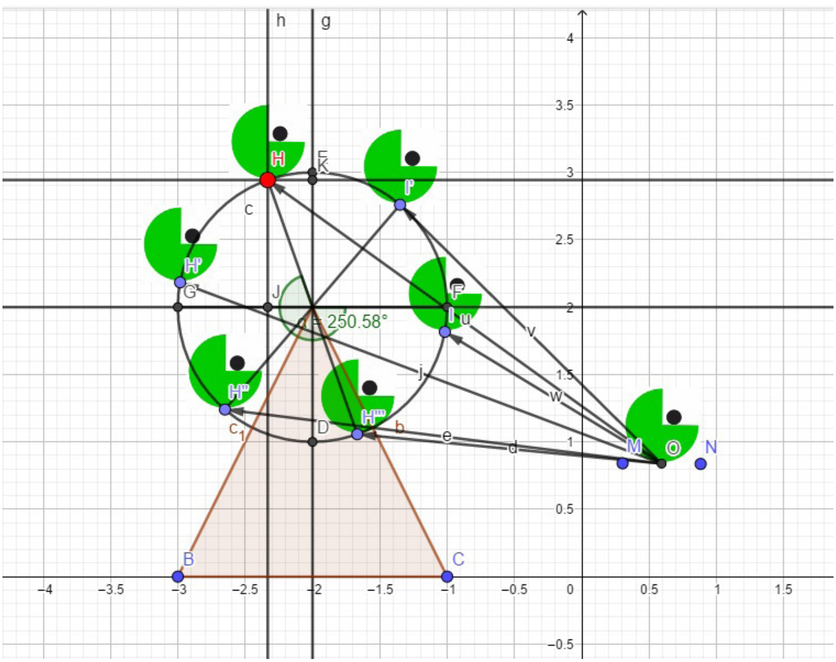
Forneceremos um tutorial da construção da roda-gigante no GeoGebra. O passo a passo ilustrativo se encontra em Souza (2015). Esta animação será utilizada para simular os gráficos das funções trigonométricas, ver Figuras 1 e 2.

1. Com a Ferramenta Ponto, marque o ponto $A = (-2{,}2)$;
2. Com a Ferramenta Círculo selecione o centro *A* e raio 1 para formar a circunferência c;
3. Com a Ferramenta polígono construa um triângulo rígido com os pontos $A(-2{,}2)$, $B(-3{,}0)$ e $C(-1{,}0)$;
4. No campo Entrada digite $Perpendicular(A, EixoY)$ para aparecer a reta f;
5. No campo Entrada digite $Perpendicular(A, EixoY)$ para aparecer a reta g;
6. No campo Entrada digite $Interseção(c, g)$ para aparecer os pontos *B* e *C*;
7. No campo Entrada digite $Interseção(c, f)$ para aparecer os pontos *G* e *F*;
8. Com a Ferramenta Ponto, marque o ponto (*H*) na circunferência;
9. Com o lado direito do mouse clique no ponto e configure-o em $Álgebra \rightarrow Repetir \rightarrow Descrescente$ (para que o ponto gire no sentido horário);
10. Clique no ponto *H* com o lado direito do mouse habilitando a *animação*. Utilize o botão de pausa no canto esquerdo inferior da área do plano cartesiano sempre que necessário;
11. Com a Ferramenta Rotacionar, selecione os pontos *H* e *A* com ângulo de 60° (a roda-gigante terá seis cadeiras e 360°/6 = 60°);
12. Com a Ferramenta Rotacionar, selecione os pontos *H'* e *A* com ângulo de 60°;
13. Repita o processo com H'', H''', I e I';
14. No campo Entrada digite $Perpendicular(H, f\ )$ para aparecer a reta *h* e $Interseção(H, f\ )$, para aparecer o ponto *j*;
15. No campo Entrada digite $Perpendicular(H, g)$ para aparecer a reta *i* e $Interseção(H, f)$, para aparecer o ponto *k*;
16. Pesquise ou construa uma imagem que lembre uma cadeira de roda gigante, salvando-a numa pasta. Utilizando a ferramenta

Texto, selecione inserir imagem. Clique na janela de visualização e a imagem *fig1* aparecerá em função dos pontos *M* e *N*;

17. No campo Entrada digite $PontoMédio(M, N)$ para aparecer o ponto *o*;
18. Com a Ferramenta Reta crie o vetor $OH = u$;
19. No campo Entrada digite $Transladar(fig1, u)$;
20. Crie os vetores $OH' = j, OH'' = e, OH''' = d, OI = w$ e $OI' = v$;
21. Faça a translação da *fig1* com cada vetor formado;
22. Trace os segmentos AH, AH', AH'', AH''', AI e AI';
23. No campo Entrada digite $Ângulo(H, A, F)$ para que o ângulo *α* apareça;

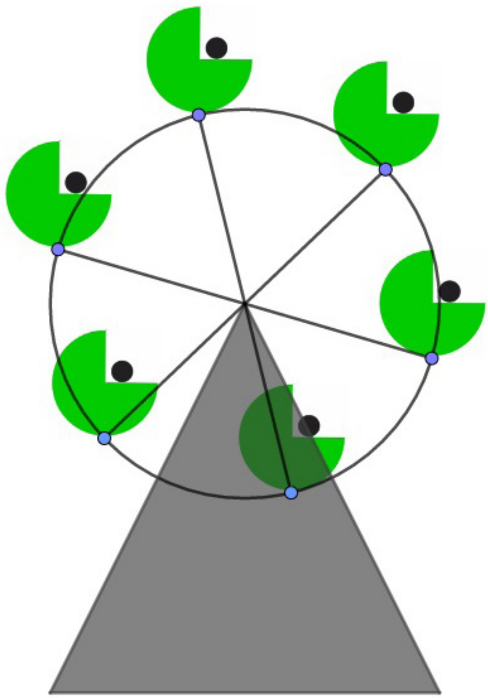
Figura 1 - Imagem da roda gigante obtida após os passos 1 a 23.



Fonte: Elaborada pelos autores.

24. Oculte os elementos desnecessários à visualização clicando nos objetos da Janela de Álgebra e configure-os com as cores e estilos desejados.

Figura 2 - Imagem da roda gigante obtida após o passo 24.



Fonte: Elaborada pelos autores.

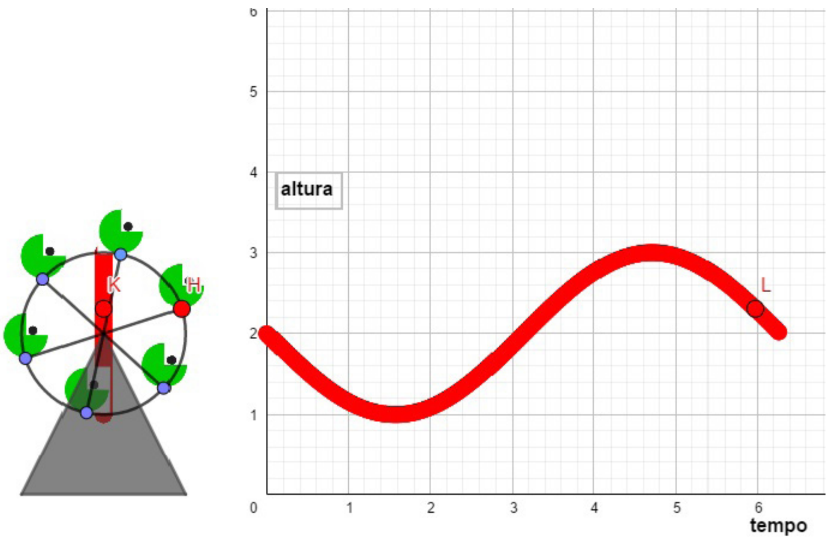
Função Seno

O gráfico desta função descreve a dependência entre a altura da cadeira em relação ao chão e o tempo do percurso desta cadeira, no movimento de uma roda-gigante. Utilizaremos a roda-gigante construída para simular graficamente como mostra a Figura 3.

1. Com o lado direito do mouse, clique no ponto *H* configurando-o na cor vermelha e tamanho *7*; faça o mesmo para o ponto *K* e habilite o rastro;
2. No campo Entrada digite $(\alpha, y(H))$ para aparecer o ponto *L*;
3. Configure o ponto *L* na cor vermelha, tamanho *7* e habilite o rastro;

4. Configure os eixos cartesianos selecionando direção positiva apenas;
5. Com a ferramenta Texto digite altura no $Eixo\ Y$ e tempo no $Eixo\ X$;
6. O gráfico será gerado ao clicar na animação (canto esquerdo inferior da área do plano cartesiano).

Figura 3 - Imagem do gráfico da função seno e a roda gigante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

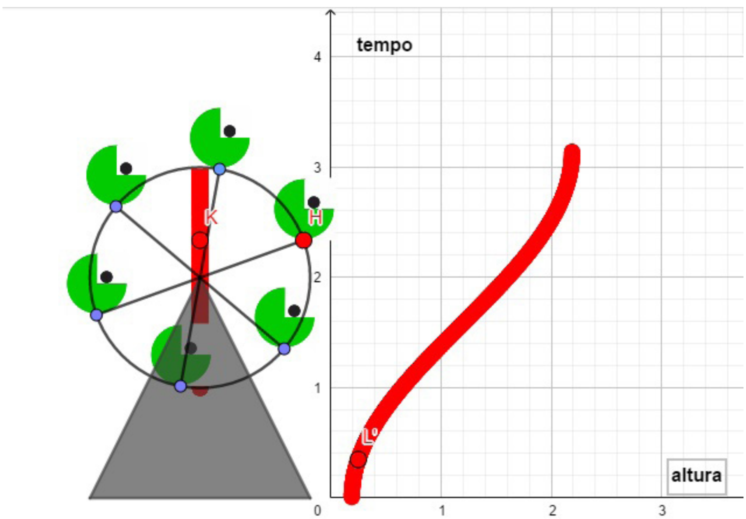
Função Arco Seno

O gráfico desta função descreve a dependência entre o tempo de percurso e a altura da cadeira, no movimento de uma roda-gigante, ou seja, é a função inversa do seno limitada no intervalo [0;π] do domínio. Utilizaremos a roda-gigante construída para simular o movimento, como ilustra a Figura 4.

1. Com o lado direito do mouse, clique no ponto *H* configurando-o na cor vermelha e tamanho *7*; faça o mesmo para o ponto *K* e habilite o rastro;

2. Configure o ponto *H* em $\acute{A}lgebra \rightarrow Repetir \rightarrow Crescente$ (para que o ponto gire no sentido anti-horário);
3. No campo Entrada digite $(x(H), \alpha)$ para aparecer o ponto *L*;
4. No campo Entrada digite $Reflexão(L, EixoY)$ para aparecer o ponto L';
5. Configure o ponto L' na cor vermelha, tamanho 7 e habilite o rastro;
6. Configure o ângulo α entre 0° e 180°.

Figura 4 - Imagem do gráfico da função arco seno e a roda gigante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

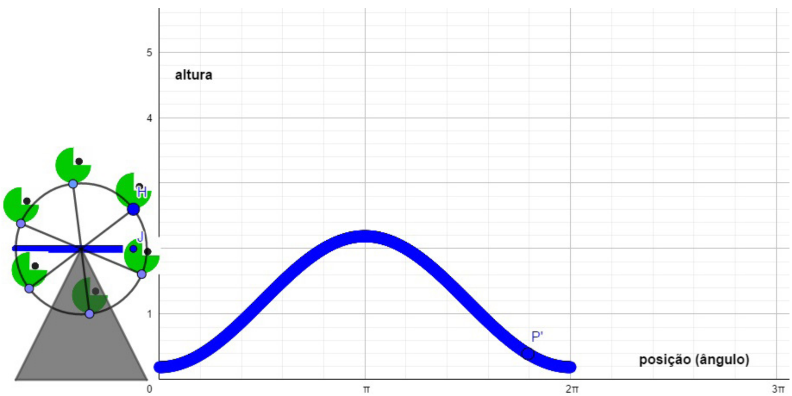
Função Cosseno

O gráfico desta função descreve a relação entre a posição da cadeira e sua altura em relação ao chão, no movimento de uma roda-gigante. Esta posição é dada pelo ângulo em radiano. Vejamos a construção do gráfico dinâmico no GeoGebra, ilustrado na Figura 5.

1. Com o lado direito do mouse, clique no ponto *H* configurando-o na cor azul e tamanho *7*; faça o mesmo para o ponto *J* e habilite o rastro;

2. No campo Entrada digite $(\alpha, x(H))$ para aparecer o ponto *P*;
3. No campo Entrada digite $Reflexão(P, EixoX)$ para aparecer o ponto *P'*;
4. Configure o ponto *P'* na cor azul, tamanho *7* e habilite o rastro;
5. Oculte o ponto *P*;
6. Configure os eixos cartesianos selecionando direção positiva apenas;
7. Com a ferramenta Texto digite altura no $Eixo\ Y$ e posição (ângulo) no $Eixo\ X$;
8. O gráfico será gerado ao clicar na animação (canto esquerdo inferior da área do plano cartesiano).

Figura 5 - Imagem do gráfico da função cosseno e a roda gigante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

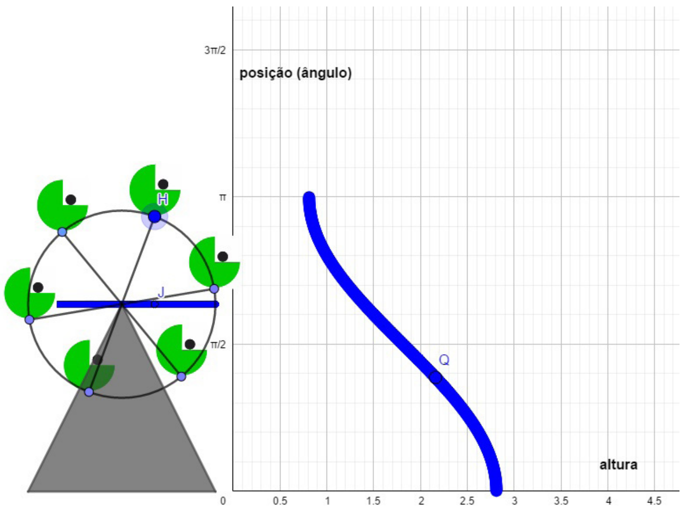
Função Arco Cosseno

O gráfico desta função descreve a relação entre a altura da cadeira em relação ao chão e sua posição, no movimento de uma roda-gigante. É o inverso da função cosseno. Apresentaremos o protocolo de sua construção que simula este movimento ilustrado na Figura 6.

1. Com o lado direito do mouse, clique no ponto *H* configurando-o na cor azul e tamanho *7*; faça o mesmo para o ponto *J* e habilite o rastro;

2. Configure o ponto *H* em $\acute{A}lgebra \rightarrow Repetir \rightarrow Crescente$ (para que o ponto gire no sentido anti-horário);
3. No campo Entrada digite $(x(H), \alpha + 3)$, para aparecer o ponto *Q*;
4. Configure o ponto *Q* na cor azul, tamanho *7* e habilite o rastro;
5. Configure os eixos cartesianos selecionando direção positiva apenas;
6. Com a ferramenta *Texto,* digite posição (ângulo) no $Eixo\ Y$ e altura no $Eixo\ X$;
7. O gráfico será gerado ao clicar na animação (canto esquerdo inferior da área do plano cartesiano);
8. Configure o ângulo *α* entre 0° e 180°.

Figura 6 - Imagem do gráfico da função arco cosseno e a roda gigante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

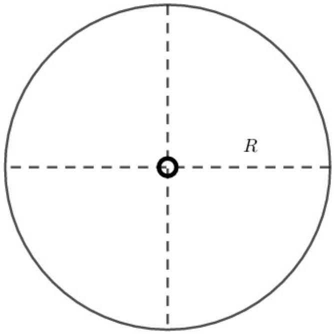
Relato de experiência

O experimento *A Roda-Gigante* foi aplicado numa turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública, antes de iniciar os estudos sobre funções trigonométricas. Fizemos uma comparação dos gráficos construídos pelos alunos através das relações: altura (da cadeira) × ângulo (posição da cadeira) e ângulo × altura, a fim de encontrar a melhor função que modela este movimento. Os conteúdos iniciais arcos e ângulos já haviam sidos abordados.

O tempo necessário para realização da atividade foi de seis horas/aulas, sendo divididas em: duas aulas para construção da roda-gigante; uma aula para medições; duas aulas para construção dos gráficos e uma aula para visualização e comparação a partir das animações feitas no GeoGebra. Vale ressaltar que foi pedido com antecedência aos alunos que trouxessem os materiais necessários à realização da aula: papelão, tampinhas de garrafa PET e barbante. Os outros materiais foram disponibilizados pela unidade escolar: lápis, borracha, régua, compasso, transferidor, papel milimetrado e cópias impressas de um mini transferidor.

A sala foi dividida em cinco grupos: quatro grupos com cinco alunos cada e um grupo com quatro alunos. Para desenhar duas circunferências de mesmo raio R, entre 5 cm e 15 cm, no papelão e cortá-las, formando dois discos, alguns alunos utilizaram o transferidor de 360° pois não sabiam manusear adequadamente o compasso, porém após o desenho tiveram dificuldade em encontrar o centro da circunferência, lugar onde deveriam inserir um lápis posteriormente. Assim, eles solicitaram ajuda para desenhar com o compasso. Nesse momento é importante que o professor incentive o aluno no manuseio adequado dos instrumentos de desenho para que os erros nas medidas sejam os menores possíveis. Ao construir as circunferências foram marcados dois diâmetros perpendiculares, como indica a Figura 7. Nas extremidades dos diâmetros de uma das circunferências foram coladas as quatro tampinhas de maneira alternada, uma virada para baixo e outra para cima com o intuito de fixar melhor os discos.

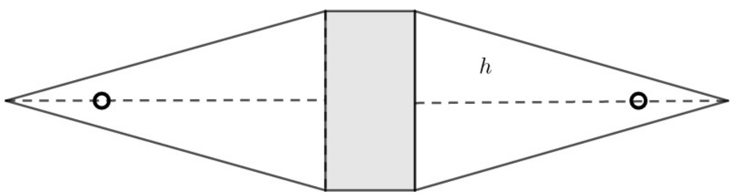
Figura 7 - Molde da Roda.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para construir o disco da base da roda-gigante foi necessário desenhar uma circunferência com raio de aproximadamente 6 cm. Para o suporte, foi preciso desenhar um hexágono formado por um retângulo e dois triângulos isósceles de altura h um pouco maior que o raio *R*, além de dois furos, como indica a Figura 8.

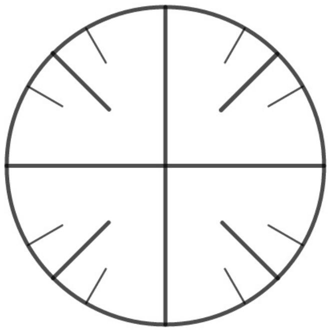
Figura 8 - Molde do suporte da roda-gigante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Os alunos sentiram dificuldade em desenhar o retângulo do molde, pois as medidas não foram preestabelecidas. Isso fez com que eles, por meio de aproximações, construíssem a melhor sustentação da sua roda-gigante. Um dos grupos conseguiu construir o molde usando os instrumentos de desenho régua e compasso pedindo auxílio ao professor. Os outros fizeram à mão livre. Os alunos colaram o disco da base no retângulo do suporte, o mini transferidor, Figura 9, e depois um lápis passando pelos furos indicados.

Figura 9 - Mini transferidor.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Figura 10 mostra uma mini roda-gigante, construída pelos estudantes.

Figura 10 - A mini roda-gigante.

Fonte: Imagem dos autores.

Detalhamos agora a próxima etapa que foi a medição dos arcos e construção das tabelas:

- Divisão de tarefas para os componentes de cada grupo: dois alunos para medição, um aluno para a notação na tabela, um aluno para esboçar o gráfico, um aluno para marcar o ponto no gráfico;

- Na divisão da roda gigante em oito cadeiras (ângulos de $0°$, $45°$ e $90°$, juntamente com seus simétricos na primeira volta), os alunos marcaram pontos na extremidade utilizando o mini transferidor;
- Medindo a altura da cadeira da roda-gigante em relação a base, conforme ela se movimentava, os alunos perceberam que após o ângulo de 90° os valores das alturas começavam a se repetir. No momento de intervenção foi dito que o gráfico representava movimento periódico da roda e por isso alguns valores se repetiam. Além disso, não era linear, pois a taxa de variação da altura em relação ao ângulo dada por

$$\frac{\Delta h}{\Delta \theta} = \frac{h(\theta_1) - h(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2},$$

não era constante no movimento.

A Figura 11 ilustra os alunos o processo de realização do experimento.

Ao término da construção dos gráficos os alunos fizeram uma comparação com os demais grupos, notando que embora as rodas-gigantes apresentassem medidas diferentes o comportamento dos pontos foi semelhante, com valor máximo e mínimo. Alguns ligaram os pontos com segmentos de reta e foi preciso uma intervenção, pois para que o gráfico fosse formado por retas a taxa de variação da altura em relação aos ângulos deveria ser constante.

Após a atividade os alunos visualizaram o experimento no computador. A roda-gigante construída no GeoGebra pôde ser explorada de modo dinâmico, fazendo com que ao desenrolar o arco no plano cartesiano as medidas fossem mais precisas e o movimento virtual fosse semelhante ao real. Foi explicado aos alunos que se tratava do gráfico de uma função trigonométrica, pois ela é definida numa circunferência unitária com sentido anti-horário através da projeção ortogonal de um ponto contido na extremidade, sobre um dos eixos cartesianos. No experimento o ponto é representado pela cadeira da roda-gigante e a projeção é a altura da cadeira em relação à base de sustentação.

Figura 11 - Alunos realizando a atividade.

Fonte: Imagem dos autores.

Definindo as funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico, concluímos que o gráfico, altura X ângulo, é mais bem representado pela função cosseno. Para o gráfico ângulo X altura foi verificado que não representa uma função, pelo teste da reta vertical, daí limitamos o intervalo do domínio da relação entre as grandezas, para os ângulos da meia-volta [0;π]. Neste momento definimosa função inversa do cosseno (arco cosseno), apresentando a construção do seu gráfico feito no GeoGebra. De forma análoga, definimos a função inversa do seno (arco seno).

Conclusão

Diversos tutoriais de construções feitos no GeoGebra são encontrados com facilidade na internet, porém o que podemos notar é que os professores ainda sentem dificuldade em sua utilização por não terem uma familiaridade com o *software* e pela falta de tempo em aprendê-lo. Neste trabalho, procuramos facilitar esse processo através da abordagem do protocolo de construção dos tutoriais ensinando o professor a adaptar os materiais encontrados às suas experiências em sala de aula.

Lima (2007) critica o método tradicional de ensino da Matemática, ressaltando que para o seu bom êxito é necessária uma tripla ação: conceitualização, manipulação e aplicação. Para atender esses fins procuramos criar uma proposta didática através da aplicação de um experimento com gráficos dinâmicos, sem perder de vista o rigor matemático do conteúdo que o professor deve ter como bagagem.

Em Matemática é importante salientar que a formalização é fundamental para que o aluno possa resolver questões inerentes ao conteúdo em outros momentos sem perder de vista que a Matemática é baseada em argumentos validados através da lógica. De acordo com Lima (2007) “a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações” (LIMA, 2007, p. 140). Após a aplicação do experimento e de maneira contextualizada e interdisciplinar, chegamos à conclusão de que os alunos foram levados à definição das funções seno, cosseno, arco cosseno e arco-seno, com a construção dinâmica dos seus gráficos e algumas propriedades. Pudemos explorar a modelagem de fenômenos oscilatórios que são descritos por funções trigonométricas devido ao seu caráter periódico, além de relacionar com outras áreas do conhecimento.

Não existe uma receita pronta para o sucesso no ensino de Matemática. Aqui apresentamos uma metodologia diferenciada de trabalhar um conteúdo do Ensino Médio de maneira que fique claro aos alunos a importância de estudar Matemática através da sua relação com as situações cotidianas e do trabalho em equipe. O GeoGebra é um excelente instrumento de validação geométrica de ideias permitindo abordar conteúdos matemáticos de forma dinâmica e visual.

Esta proposta é motivadora e muito importante no contexto sociocultural ao qual atuamos, buscando mudar a forma de compreensão dos contextos matemáticos. Acreditamos que ela não está fechada no sentido de que pode ser adaptada dependendo da abordagem do professor e o público-alvo. Esperamos também que seja profícuo em pesquisas e discussões relacionadas à área de ensino de Matemática.

Referências

BAHIA. **Ambiente Educacional Web**. Salvador: Secretaria de Educação do Estado. Disponível em http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/disciplinas/topicos/id/36. Acesso em 01 ago. 2015.

BRASIL. **LDB:** Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 1996, disponível em http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf. Acesso em 01 ago. 2015.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

Disponível em www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em 05 set. 2015.

BRASIL. **Programa Nacional do Livro Didático**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Disponível em http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id=12391option=com_contentview=article. Acesso em 01 ago. 2015.

CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria/Números complexos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005.

GIRALDO, V.; MATTOS, F.; CAETANO, P. **Recursos Computacionais no Ensino da Matemática**. SBM, 2014 (Coleção Profmat).

HOHENWARTER, M. **GeoGebra**. Áustria, 2001. Disponível em www.geogebra.org.

KLINE, M. **O fracasso da Matemática Moderna**. IBRASA. SP, 1976.

LIBANEO, J. C. **Didática**. São Paulo, SP: Cortez, 1998.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio.** Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 10 ed., Coleção do professor de Matemática, 2012.

LIMA, E. L. **Exames de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do professor de Matemática, 2007.

SOARES, M. Z. M. C. **A roda-gigante**. Matemática multimídia, Unicamp. 2010. Disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1033. Acesso em 05 set. 2015.

SOUZA, L. M. S. **Uma proposta de estudo de funções trigonométricas e suas inversas através do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2015.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do professor de Matemática, 2007.

Um passeio pelas frações contínuas

Fabrícia da Conceição Lisboa
Danilo de Jesus Ferreira

Introdução

A teoria das frações contínuas é um assunto de grande relevância na Matemática, pois constitui uma ferramenta muito importante para o estudo de vários problemas, sobretudo àqueles relacionados aos números reais. As frações contínuas surgiram pela primeira vez nas obras do matemático indiano Aryabhata (século VI d.C.), para resolver equações lineares. O tema ressurgiu na Europa do século XV d.C. por Pietro Antonio Cataldi (século XVI d.C.), de Bolonha, que escreveu algumas raízes quadradas nesta forma, dando um dos primeiros passos para o desenvolvimento da teoria. O termo *fração contínua* apareceu pela primeira vez em 1653 em uma edição do livro *Arithmetica Infinitorum* do matemático inglês John Wallis. Na mesma época, o famoso físico matemático holandês, Christiaan Huygens, fez uso das frações contínuas na construção de instrumentos científicos, e mais tarde, no século XVIII e no início do século XIX, Gauss e Euler exploraram muitas de suas propriedades.

Hoje em dia esta teoria ainda é tema de muitas pesquisas e seu estudo nos permite compreender padrões muito interessantes sobre as representações dos números reais. Suas aplicações vão além da matemática, podendo ser relacionadas com outras áreas do conhecimento como Física, Astronomia e Computação. Neste sentido, o objetivo deste capítulo é discorrer sobre a teoria das frações contínuas e exibir algumas de suas aplicações.

Na elaboração do mesmo, o qual é fruto da dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da UFRB (LISBOA, 2019), foi realizada uma pesquisa de caráter bibliográfica buscando elementos para sua fundamentação teórica. Foram utilizados como suporte teórico os livros clássicos sobre o assunto, Niven (1991) e Santos (1998), além da publicação mais recente de Moreira (2011).

Por fim, o capítulo está desenvolvido em quatro seções. A primeira delas apresenta as ferramentas necessárias para o desenvolvimento e compreensão do tema, partindo de conceitos básicos de Divisibilidade, Máximo Divisor Comum e Algoritmo de Euclides. Na segunda apresentamos a relação das frações contínuas finitas com os números racionais, e nas duas últimas seções estabelecemos a relação das frações contínuas infinitas com os números irracionais.

Pré-requisitos

O estudo das frações contínuas se baseia fortemente no conceito de divisibilidade e no Algoritmo de Euclides. Sendo assim, reunimos nesta pequena seção os principais resultados sobre estes temas que serão necessários para a compreensão da teoria. Para dar fluidez ao texto os resultados serão fornecidos sem demonstrações, as quais poderão ser encontradas nas referências, Lima (1976) e Santos (1998).

Definição 1.1. Dados dois números inteiros a e b diremos que a divide b, denotando por $a|b$ quando existir $c \in Z$, tal que $b = ac$. Se $a|b$, diremos também que a é um divisor de b ou que b é divisível por a.

O teorema a seguir apresenta as propriedades elementares da divisibilidade.

Teorema 1.1. Sejam $a, b, c, d \in Z$. Então,

i) $1|a$, $a|a$ e $a|0$;

ii) se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$;

iii) se $a|b$ e $c|d$ então $ac|bd$;

iv) se $a|b$ e $a|c$ então para quaisquer $x,y \in Z$ tem-se $a|(xb + yc)$;
v) se $a|b$ e $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$.

Definição 1.2. Sejam $a,b \in Z$ com pelo menos um deles diferente de zero. O Máximo Divisor Comum – MDC de a e b é um inteiro positivo d tal que:
i) $d|a$ e $d|b$;

ii) se $c \in Z$ é tal que $c|a$ e $c|b$, então $c|d$.

Usaremos a notação (a, b) para representar o MDC de a e b. Segue desta definição e do Teorema 1.1 que o MDC de dois inteiros é único, e é o maior dentre todos os divisores comuns deles.

A seguir apresentamos um dos principais resultados da Aritmética.

Teorema 1.2. (Algoritmo da Divisão Euclidiana)
Dados dois inteiros a e $b, b \neq 0$, existe um único par de inteiros q e r, tais que

$$a = qb + r, \qquad 0 \leq r < |b| \quad (r = 0 \Leftrightarrow b|a),$$

(q é chamado de quociente e r de resto da divisão de a por b).

Com o auxílio da divisão euclidiana construiremos abaixo, o importante Algoritmo de Euclides. Este algoritmo, além de nos fornecer um método para se calcular o MDC entre dois inteiros, também nos permitirá exprimir qualquer número real numa série de frações estendidas, conhecidas como frações contínuas. Sua construção será baseada nos dois lemas a seguir.

Lema 1.1 (Euclides)**.** Sejam a, b e $n \in Z$ tais que o MDC $(a, b - na)$ existe. Então, (a,b) existe e $(a, b) = (a, b - na)$.

Lema 1.2 (Princípio da Boa Ordenação)**.** Se S é um subconjunto não vazio de inteiros positivos e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.

De posse dos dois resultados acima, o Algoritmo de Euclides é estabelecido da seguinte forma: dados dois inteiros a e b com $a \geq b \geq 0$, efetua-se sucessivamente as seguintes divisões:

$$
\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 \qquad (0 < r_1 < b) \\
b &= q_2 r_1 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1) \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2) \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \quad (0 < r_n < r_{n-1}) \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n \quad (r_{n+1} = 0).
\end{aligned}
$$

Segue imediatamente do Princípio da Boa Ordenação que para algum natural n teremos $r_{n+1} = 0$, pois do contrário obteríamos uma sequência decrescente de inteiros positivos limitada inferiormente $q > r_1 > r_2 > \cdots > r_{n+1} > r_n > \cdots$ o que é absurdo. Portanto, $r_{n+1} = q_{n+1} r_n$, e aplicando-se sucessivamente o Lema de Euclides teremos que o MDC de a e b será r_n, o último resto não-nulo na sequência de divisões sucessivas.

Finalizaremos esta seção com o importante conceito de sequências numéricas.

Definição1.3. Uma sequência $\{x_n\}$ é dita crescente (resp. decrescente) se $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$) para todo $n \in N$. Em qualquer um destes casos dizemos que ela é monótona. Além disso, dizemos que $\{x_n\}$ é limitada se existir uma constante $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in N$.

Associado à esta definição temos o

Teorema 1.3. Toda sequência monótona limitada de números reais $\{x_n\}$ converge, isto é, existe um número real l tal que $\lim x_n = l$.

Frações contínuas finitas

Considere o número $\frac{67}{29}$. O cálculo do MDC dos números 67 e 29 através do Algoritmo de Euclides nos fornece a seguinte cadeia de igualdades:

$$\begin{aligned} 67 &= 2 \cdot 29 + 9 \\ 29 &= 3 \cdot 9 + 2 \\ 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

A partir delas podemos expressar o número racional $\frac{67}{29}$ como

$$\begin{aligned} \frac{67}{29} &= 2 + \frac{2}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}} \\ &= 2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{9}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}} \\ &= 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Esta última igualdade exprime o número racional $\frac{67}{29}$ como uma espécie de fração estendida. Conforme a definição a seguir, esta fração estendida é conhecida como a fração contínua de $\frac{67}{29}$ e fornece uma nova maneira de representá-lo.

Definição 2.1. Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}} \tag{1}$$

onde os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são inteiros. Estes termos são denominados de quocientes parciais.

O número de termos de uma fração contínua pode ser finito ou infinito. Se a quantidade dos números $a_i\acute{}s$ for finito dizemos que a fração contínua é finita e, caso contrário, dizemos que ela é infinita.

A fração contínua representada pela expressão (1) será denotada por$[a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Analogamente, a fração contínua finita

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

será representada pela notação $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$.

O resultado a seguir nos diz que apenas os números racionais possuem representações finitas.

Teorema 2.1. Toda fração contínua finita representa um número racional. Reciprocamente, todo número racional pode ser representado sob a forma de fração contínua finita.

Demonstração. A primeira parte da demonstração é imediata. Para estabelecer a recíproca consideremos um número racional qualquer $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$. Pelo algoritmo da Euclides temos que

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} \tag{2}$$

onde a_1 e r_1 são inteiros e $0 \leq r_1 < q$. Se $r_1 = 0$, $\frac{p}{q}$ será um número inteiro, e, portanto, $\frac{p}{q} = [[a_1]] = \max\{m \in Z; m \leq q\}$ é a parte inteira de a_1. No entanto, se $r_1 \neq 0$ escrevendo

$$\frac{r_1}{q} = \frac{1}{\frac{q}{r_1}},$$

e fazendo a substituição em (2) obtemos

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}, \quad 0 < r_1 < q.$$

Agora aplicando o Algoritmo de Euclides em $\frac{q}{r_1}$ obtemos

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$, a prova termina, pois

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2} = [a_1, a_2].$$

Caso contrário, se $r_2 \neq 0$, temos

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}} \quad 0 < r_2 < r_1,$$

que equivale a

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

Em seguida repetimos o mesmo processo com $\frac{r_1}{r_2}$ e assim sucessivamente. Pelo Princípio da Boa Ordenação existirá um natural n tal que $r_n = 0$. Assim, a partir da cadeia de igualdades

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{p}{q} = a_1 + \dfrac{r_1}{q}, & & 0 \leq r_1 < q, \\[2ex]
\dfrac{q}{r_1} = a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}, & & 0 \leq r_2 < r_1, \\[2ex]
\dfrac{r_1}{r_2} = a_3 + \dfrac{r_3}{r_2}, & & 0 \leq r_3 < r_2, \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots \\[2ex]
\dfrac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, & & 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2}, \\[2ex]
\dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n, & & r_n = 0,
\end{array}
$$

resulta que

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]$$

estabelecendo o resultado. □

Uma observação importante a ser feita é que numa fração contínua $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$, o coeficiente a_1 poderá ser positivo, negativo ou nulo, enquanto que os demais $a_2, a_3, \ldots$ sempre serão inteiros positivos. Este fato segue imediatamente do Algoritmo de Euclides.

Frações contínuas infinitas

Vimos na seção anterior que toda fração contínua finita representa um racional, e reciprocamente, todo racional é representado por uma fração contínua finita. Nesta seção abordaremos a expansão dos números irracionais em frações contínuas (através do Algoritmo de Euclides) caracterizando, portanto, todos os números reais.

Seja então α um número irracional e seja $a_1 = [[\alpha]]$ a sua parte inteira. Assim,

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

onde $x_1 = \dfrac{1}{\alpha - a_1}$ é irracional e $x_1 > 1$. Podemos então escrever da forma

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

onde $a_2 = [[x_1]], x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_2}$ é irracional e $x_2 > 1,$ irracional. Repetindo este processo recursivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 + \frac{1}{x_1} \\ x_1 &= a_2 + \frac{1}{x_2} \\ x_2 &= a_3 + \frac{1}{x_3} \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3}$$

onde todos os a_i, s $(i \geq 2)$ são inteiros maiores ou iguais a 1 e todos os x_i, s $(i \geq 1)$ são irracionais maiores que 1. Vemos então que a fração contínua de α é infinita, e que para todo n natural vale a relação

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n, x_n] \tag{4}$$

sendo $x_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n+1}}$.

Exemplo. Considerando o irracional $\sqrt{3}$, temos que $a_1 = [[\sqrt{3}]] = 1$ e dai

$$\sqrt{3} = a_1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_1}$$

para algum $x_1 > 1$ irracional. Mais precisamente,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

e, portanto,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}.$$

Agora como $a_2 = [\left[\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}\right]] = 1$, segue-se que

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

donde

$$x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1.$$

Logo,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_2}}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}.$$

Analogamente, como $a_3 = [[\sqrt{3}+1]] = 2$, segue-se que

$$\sqrt{3} + 1 = x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}$$

e, portanto,

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Como $x_3 = x_1$ concluímos que x_4 será igual a x_2 e desta forma vemos que a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ será dada por $1,1,2,1,2,1,2,\ldots$. Assim, afração contínua infinita que representa $\sqrt{3}$ será

$$[1,1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots].$$

Provaremos adiante (Teorema 4.6) a recíproca do resultado estabelecido nesta seção. Mais precisamente, mostraremos que toda fração contínua infinita representa um irracional, e para isto, faremos um pequeno passeio pelos convergentes de uma fração contínua.

Convergentes

Fixemos um racional $\frac{p}{q}$ com expansão em fração contínua dada por

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$$

onde a_1 é um inteiro positivo, negativo, ou nulo, e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

são inteiros positivos, e consideremos as frações

$$c_1 = \frac{a_1}{1},$$

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2},$$

$$c_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}},$$

$$\vdots$$

$$c_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Estas frações são chamadas, respectivamente, de primeiro, segundo, terceiro,..., n-ésimo convergente da fração contínua $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$, sendo o n-ésimo convergente igual a própria fração contínua. Em geral, o i-ésimo convergente da fração contínua $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$, é definido por

$$c_i = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i] \quad 1 \leq i \leq n. \tag{5}$$

Se considerarmos

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}, \qquad \text{onde } p_1 = a_1 \ \text{ e } \ q_1 = 1$$

teremos,

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2} \quad \text{onde } \ p_2 = a_1 a_2 + 1 \ \text{ e } \ q_2 = a_2.$$

Calculando c_3, c_4 e c_5 obtemos, respectivamente:

$$c_3 = \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3} \quad \text{onde} \quad p_3 = a_3p_2 + p_1 \;\text{ e }\; q_3 = a_3q_2 + q_1$$

$$c_4 = \frac{a_4p_3}{a_4q_3 + q_2} = \frac{p_4}{q_4} \quad \text{onde} \quad p_4 = a_4p_3 + p_2 \;\text{ e }\; q_4 = a_4q_3 + q_2$$

$$c_5 = \frac{a_5p_4}{a_5q_4 + q_3} = \frac{p_5}{q_5} \quad \text{onde} \quad p_5 = a_5p_4 + p_3 \;\text{ e }\; q_5 = a_5q_4 + q_3.$$

Os números p_i e q_i tais que $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ são chamados, respectivamente, numerador e denominador do i-ésimo convergente. Observando as igualdades acima podemos conjecturar que estes satisfazem as relações

$$p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2}$$
$$q_i = a_iq_{i-1} + q_{i-2}.$$

No teorema abaixo provaremos, por indução, que estas relações de fato se verificam.

Teorema 4.1. Seja $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ o i-ésimo convergente da fração contínua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Então, o numerador p_i e o denominador q_i de c_i satisfazem as relações

$$p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2} \tag{6}$$
$$q_i = a_iq_{i-1} + q_{i-2} \tag{7}$$

para todo $i = 3,4,5, \dots, n$ com as condições iniciais

$$p_i = a_1, \qquad q_1 = 1,$$

$$p_2 = a_2a_1 + 1, \qquad q_2 = a_2.$$

Demonstração. De fato, a partir dos cálculos feitos para c_1, c_2 e c_3 e segue que o resultado é válido para $i = 3$. Suponhamos agora que as relações (6) e (7) se verificam para todo $j \leq i$ com $3 \leq i \leq n$. Isto significa que

$$c_i = [a_1, a_2, \dots, a_i] = \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}}. \tag{8}$$

Observando a expressão (5) que define o i-ésimo convergente vemos que c_{i+1} pode ser obtido de c_i simplesmente pela substituição de a_i por $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$. isto nos diz que se pudermos mostrar que os números $p_{i-1}, p_{i-2}, q_{i-1}$ e q_{i-2} dependam apenas dos quocientes parciais $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$, poderemos usar (8) para a obtenção de c_{i+1} pois estamos estamos assumindo, como hipótese de indução, a validade de (8) para todo $j \leq i$. Ora, como

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{a_{i-1} p_{i-2} + p_{i-3}}{a_{i-1} q_{i-2} + q_{i-3}},$$

vemos que os números p_{i-1} e q_{i-1} dependem apenas dos números a_{i-1} e dos números $p_{i-2}, q_{i-2}, p_{i-3}$ e q_{i-3} os quais por sua vez dependem dos precedentes $a's, p's$ e $q's$. Desta forma $p_{i-2}, q_{i-2}, p_{i-1}$ e q_{i-1} dependem somente dos primeiros $i - 1$ quocientes parciais $a_1, a_2, \dots,$ a_{i-1} sendo independentes de a_i e portanto não serão alterados com a substituição de a_i por $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$. Podemos, portanto, utilizar (8) para a obtenção de c_{i+1}, bastando, para isto, substituir a_i por $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$.
De fato,

$$c_{i+1} = \frac{\left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}}\right) p_{i-1} + p_{i-2}}{\left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}}\right) q_{i-1} + q_{i-2}}$$

$$= \frac{a_{i+1}(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{a_{i+1}(a_i q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}}$$

$$= \frac{a_{i+1} p_i + p_{i-1}}{a_{i+1} q_i + q_{i-1}}$$

$$= \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$$

finalizando a demonstração. □

Corolário 4.1. A sequência $\{q_i\}$ é uma sequência monótona crescente de termos positivos.

Demonstração. Basta observar que $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$ e que $a_i \ (i \geq 2)$ e $q_i \ (i \geq 1)$ são todos positivos. □

O Teorema a seguir estabelece uma relação que nos permitirá deduzir que para todo convergente $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ temos que $(p_i, q_i) = 1$.

Teorema 4.2. Definindo $p_0 = q_{-1} = 1$ e, $p_{-1} = q_0 = 0$ a relação

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i \tag{9}$$

se verifica para todo $i \geq 0$ onde p_i e q_i são, respectivamente, o numerador e o denominador do i-ésimo convergente c_i.

Demonstração. Para *i* = 0 temos $p_0 q_{i-1} = p_{-1} q_0 = 1 = (-1)^0$ uma vez que $p_0 = q_{-1} = 1$ e $p_{-1} = q_0 = 0$. Assumindo, como hipótese de indução, a validade do resultado (9) para algum $i \geq 0$, mostraremos que a mesma relação também se verifica para $i + 1$. De fato, sabemos do Teorema 4.1 que

$$p_{i+1} = a_{i+1} p_i + p_{i-1} \text{ e } q_{i+1} = a_{i+1} q_i + q_{i-1}$$

e, portanto,

$$p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} = (a_{i+1} p_i + p_{i-1}) q_i - p_i (a_{i+1} q_i + q_{i-1})$$

$$= p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1}$$
$$= (-1)(p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i).$$

Assim, utilizando a hipótese de indução, obtemos

$$p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = (-1)^{i+1}$$

estabelecendo o resultado. □

Corolário 4.2. Para todo convergente $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ temos que $(p_i, q_i) = 1$.

Demonstração. Pelo teorema temos que $p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i$. Assim, qualquer divisor comum de p_i e q_i também será um divisor de 1 ou –1. Logo, o Máximo Divisor Comum p_i de q_i e deve ser igual a 1. □

Os convergentes apresentam propriedades muito interessantes. Reunimos as principais delas no teorema a seguir.

Teorema 4.3. A sequência $c_1, c_2, c_3, \ldots$ dos convergentes de uma fração contínua satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < \cdots < c_{2i+1}$,
(ii) $c_2 > c_4 > c_6 > \cdots > c_{2i}$,
(iii) $c_{2i+1} < c_{2i+2} < c_{2i}$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.2 temos que

$$p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i$$

a qual é válida independentemente da fração contínua ser finita ou não. Dividindo ambos os lados desta igualdade por q_iq_{i-1} segue-se que

$$c_i - c_{i-1} = \frac{(-1)^i}{q_iq_{i-1}}. \tag{10}$$

Agora como

$$c_i - c_{i-2} = \frac{p_i q_{i-2} - p_{i-2} q_i}{q_i q_{i-2}}$$

obtemos, usando o fato de $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$ e $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$, que

$$c_i - c_{i-2} = \frac{a_i (-1)^{i-1}}{q_i q_{i-2}}. \tag{11}$$

De (11) obtemos

$$c_{2i+3} - c_{2i+1} = \frac{a_{2i+3}}{q_{2i+3} q_{2i+1}} > 0$$

e

$$c_{2i+2} - c_{2i} = -\frac{a_{2i+2}}{q_{2i+2} q_{2i}} < 0$$

pois $a_i\ (i \geq 2), q_i (i \geq 1)$ são todos positivos. Assim,

$$c_{2i+1} < c_{2i+3}, \quad \forall\, i \geq 0 \tag{12}$$

donde

$$c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < \cdots < c_{2i+1}$$

e

$$c_{2i} < c_{2i+2}, \quad \forall\, i \geq 1 \tag{13}$$

donde

$$c_2 > c_4 > c_6 > \cdots > c_{2i}.$$

Isto estabelece os itens (*i*) e (*ii*). Quanto a (*iii*) note que a partir de (10) segue que

$$c_{2i+2} - c_{2i+1} = \frac{1}{q_{2i+2} q_{2i+1}} > 0$$

e, portanto,

$$c_{2i+2} > c_{2i+1}, \quad \forall\, i \geq 0. \tag{14}$$

Logo, combinando (13) e (14) resulta que

$$c_{2i+1} < c_{2i+2} < c_{2i}$$

estabelecendo (*iii*).

□

Corolário 4.3. Nas condições do teorema anterior, sejam $\{c_{2i+1}\}$ e $\{c_{2i}\}$ as sequências de índices ímpares e pares respectivamente. Então ambas convergem e

$$\lim_{i\to\infty} c_{2i+1} = \lim_{i\to\infty} c_{2i}\,.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.3, $\{c_{2i+1}\}$ é uma sequência crescente e limitada superiormente. Logo, pelo Teorema 1.3 ela é convergente, digamos

$$\lim_{i\to\infty} c_{2i+1} = l_{\mathrm{I}}.$$

Analogamente, $\{c_{2i}\}$ é uma sequência decrescente e limitada inferiormente, e, portanto, convergente, digamos

$$\lim_{i\to\infty} c_{2i} = l_{\mathrm{P}}.$$

Sendo $\{q_i\}$ uma sequência crescente de termos positivos, resulta de (10) que

$$\lim_{i\to\infty}(c_{2i+1} - c_{2i}) = 0$$

e, portanto,

$$l_I = \lim_{i\to\infty} c_{2i+1} = \lim_{i\to\infty} c_{2i} = l_P.$$

□

Provaremos adiante no Teorema 4.5 que se $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$, então os limites $l_P = l_I$ serão, na realidade, iguais a α. Isto nos diz que a sequência de convergentes de índice ímpar fornece uma aproximação por falta para α enquanto a sequência de convergentes de índice par fornece uma aproximação por excesso para α.

Teorema 4.4. Para qualquer número real α temos

$$[a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \alpha] = \frac{\alpha p_{i-1} + p_{i-2}}{\alpha q_{i-1} + q_{i-2}} \tag{15}$$

onde $a_1, a_2, a_3, \dots$ é uma sequência infinita de inteiros positivos com a possível exceção de a_1 e as sequências dos $p_i´s$ e $q_i´s$ são dados por (6) e (7), isto é,

$$p_0 = 1,\ p_{-1} = 0, \qquad q_0 = 0, q_{-1} = 1,$$

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2},$$

$$\mathrm{q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}, \quad i \geq 1.}$$

Demonstração. Para $n = 1$ o resultado deve ser visto como

$$\alpha = \frac{\alpha p_0 - p_{-1}}{\alpha q_0 - q_{-1}}$$

que é verdadeiro pelas condições iniciais. Para $n = 2$ temos

$$[a_1, \alpha] = \frac{\alpha p_1 + p_0}{\alpha q_1 + q_0} = \frac{\alpha a_1 + 1}{\alpha}$$

o que é verdadeiro uma vez que $[a_1, \alpha] = a_1 + \dfrac{1}{\alpha}$. Estabeleceremos agora o resultado por indução. Considerando verdadeiro o resultado para $[a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \alpha]$ temos

$$
\begin{aligned}
[a_1, a_2, \dots, a_i, \alpha] &= \left[a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + \frac{1}{\alpha}\right] \\
&= \frac{\left(a_i + \frac{1}{\alpha}\right) p_{i-1} + p_{i-2}}{\left(a_i + \frac{1}{\alpha}\right) q_{i-1} + q_{i-2}} \\
&= \frac{\alpha(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{\alpha(a_i q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}} \\
&= \frac{\alpha p_i + p_{i-1}}{\alpha q_i + q_{i-1}}
\end{aligned}
$$

o que prova o teorema. □

O corolário a seguir apresenta um interessante resultado de otimização.

Corolário 4.4. Todo convergente $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ de α satisfaz

$$|\alpha - c_i| < \frac{1}{q_i^2}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.4 temos

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_i, x_i] = \frac{x_i p_i + p_{i-1}}{x_i q_i + q_{i-1}}.$$

Assim, utilizando o Teorema 4.2 obtemos

$$\alpha - c_i = \frac{(-1)^{i+1}}{q_i(x_i q_i + q_{i-1})} \tag{16}$$

e como $a_{n+1} < x_n$ por (3), segue-se que

$$|\alpha - c_i| < \frac{1}{q_i(x_i q_i + q_{i-1})} < \frac{1}{q_i(a_{i+1} q_i + q_{i-1})}.$$

Resulta então de (7) que

$$|\alpha - c_i| < \frac{1}{q_i q_{i+1}} < \frac{1}{q_i^2}$$

pois a sequência $\{q_i\}$ é estritamente crescente. □

Teorema 4.5. Se α é irracional e $\{c_i\}$ é a sequência dos convergentes da representação de α como fração contínua, então

$$\lim_{i\to\infty} c_i = \alpha.$$

Demonstração. Basta fazer $i \to \infty$ no Corolário 4.4 acima. □

Finalizamos esta seção apresentando a importante relação entre os números irracionais e as frações contínuas infinitas e um interessante método para o cálculo de logaritmos.

Teorema 4.6. Toda fração contínua infinita $[a_1, a_2, a_3, \dots]$ representa um irracional. Reciprocamente, todo irracional é representado por uma fração contínua infinita.

Demonstração. Escrevendo $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ observamos pelo Teorema 4.3 que α está entre c_i e c_{i+1} e, portanto, $0 < |\alpha - c_i| < |c_{i+1} - c_i|, \forall\, i \geq 1$. Multiplicando por q_i resta desigualdade e utilizando (10) temos

$$0 < |\alpha q_i - p_i| < |c_{i+1} q_i - c_i q_i| < \frac{1}{q_{i+1}}.$$

Supondo α racional, isto é, $\alpha = \frac{a}{b}$, a e b inteiros com $b > 0$, a desigual-dade acima, após multiplicarmos por b nos fornece

$$|aq_i - bp_i| < \frac{b}{q_{i+1}}.$$

Como a sequência dos q_i é crescente podemos escolher i suficientemente grande de forma que $\frac{b}{q_{i+1}} < 1$. Dessa forma o inteiro $aq_i - bp_i$ estará entre – 1 e 1 e portanto $aq_i - bp_i = 0$. Assim, $\alpha = \frac{a}{b} = c_i = [a_1, \dots, a_i]$ contrariando o fato de $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$ ser uma fração contínua infinita.

Portanto, a deve ser irracional. A recíproca segue imediatamente da discussão feita no início da seção anterior. $\square$

Aplicação - Método para calcular logaritmos

Para calcular o logaritmo $\log_{b_0} b_1$ onde $1 < b_1 < b_0$, determinamos duas sequências

$$b_2, b_3, b_4, \dots$$

e

$$n_1, n_2, n_3, \dots \qquad n_i \text{ inteiros positivos}$$

satisfazendo as seguintes relações:

$$\begin{array}{lll} b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1} & \qquad b_2 = \dfrac{b_0}{b_1^{n_1}} & \\ b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1} & \qquad b_3 = \dfrac{b_1}{b_2^{n_2}} & \qquad (17) \\ \vdots \qquad \vdots & \qquad \vdots & \\ b_k^{n_k} < b_{k-1} < b_k^{n_k+1} & \qquad b_{k+1} = \dfrac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}} & \\ \vdots \qquad \vdots & \qquad \vdots & \end{array}$$

Tais sequências são construídas da seguinte maneira: como $1 < b_1 < b_0$, existe um inteiro $n_1 > 0$, tal que

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}.$$

Assim,

$$b_0 = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}} \tag{18}$$

para algum $x_1 > 1$. Definindo

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}}\ , \tag{19}$$

temos $1 < b_2 < b_1$, de modo que existe um inteiro $n_2 > 0$ tal que

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}.$$

Assim,

$$b_1 = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}} \tag{20}$$

para algum $x_2 > 1$. Definindo então

$$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$$

de modo que $1 < b_3 < b_2$ e existe um inteiro $n_2 > 0$ tal que

$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}$$

donde

$$b_2 = b_3^{n_3+\frac{1}{x_3}}$$

para algum $x_3 > 1$. Repetindo este procedimento, obtemos as sequências $\{b_i\}$ e $\{\,n_i\}$ satisfazendo (17). Agora note que, a partir de (18) e (19) obtemos

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}} = b_1^{\frac{1}{x_1}}$$

donde

$$b_1 = b_2^{x_1}.$$

Logo, segue de (20) e (21) que

$$x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2}.$$

Procedendo analogamente obteremos

$$x_2 = n_3 + \frac{1}{x_3}$$

de modo geral,

$$x_k = n_k + \frac{1}{x_{k+1}} \quad (k \geq 1). \tag{22}$$

Portanto, segue de (18) e (22) que

$$b_1 = b_0^{\left(\frac{1}{n_1+\frac{1}{x_1}}\right)} = b_0^{\left(\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{x_2}}}\right)}$$

$$= b_0^{\left(\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\frac{1}{n_4+\ddots}}}}\right)}$$

ou equivalentemente,

$$\log_{b_0} b_1 = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \ddots}}}} = [0, n_1, n_2, n_3, \ldots].$$

Este método, juntamente com o Teorema 4.6, nos permitem concluir que o $\log_{b_0} b_1$ para $1 < b_1 < b_0$ é sempre um número irracional.

Conclusão

Neste trabalho realizou-se um estudo acerca da teoria das frações contínuas, suas principais propriedades e algumas de suas aplicações. Durante o estudo houve uma grande preocupação em apresentar uma base sólida para introdução do assunto, apresentando e demonstrando os teoremas, proposições e corolários necessários para a compreensão de tema. Apresentamos as principais características das frações contínuas finitas e infinitas, associando-as aos números racionais e irracionais, respectivamente. Além disso, foi realizado um estudo sobre os convergentes, os quais fornecem excelentes métodos de aproximações racionais para um número real qualquer com erro tão pequeno quanto se queira.

Com esse trabalho esperamos contribuir com aqueles que se interessem pelo assunto, principalmente com os professores da Educação Básica, onde o assunto é praticamente desconhecido. Consideramos que outras pesquisas são bem-vindas e sugerimos a aplicação do tema em sala de aula com o objetivo de pesquisa de campo. Dessa maneira, os professores da área de matemática irão conferir concretamente o resultado da aplicação, podendo assim discutir possíveis melhorias e aprimoramentos no ensino da matemática.

Referências

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 7ªed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. Vol. 1.

LISBOA, F. C. **Uma Caracterização das Frações Contínuas Periódicas**. UFRB, Cruz das Almas-BA, 2019.

MOREIRA, C. G. **Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas**. Rio de Janeiro: 1º. Colóquio da Região Sudeste, 2011.

NIVEN, I.; ZUCKERMAN, H.; MONTGOMERY, H. **An Introduction to The Theory of Number**. 5º ed. New York: Jonh Wiley & Sons, 1991.

SANTOS, J. P. **Introdução à Teoria dos Números**. 1ºed. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

Educação Financeira nas aulas de Matemática do Ensino Médio

Wilson Teixeira Vieira Filho
Sânzia Alves do Nascimento

Introdução

Dado o aumento progressivo da complexidade dos mercados e produtos financeiros, bem como de mudanças demográficas, políticas e econômicas, a Educação Financeira assume um papel de fundamental importância para a população em geral e seus governos. Nos círculos acadêmicos e políticos, os benefícios de ser alfabetizado financeiramente são amplamente relatados, principalmente no que tange ao planejamento para aposentadoria, criação de riquezas e combate à desigualdade. Lusardi, Michaud e Mitchell (2017) aponta o conhecimento financeiro inadequado como uma determinante chave da desigualdade de riqueza, portanto deve-se buscar educar financeiramente a população como um mecanismo possível para reduzir as desigualdades (DE CLERCQ, 2019).

Nos últimos anos, tem-se observado um aumento significativo da importância do tema Educação Financeira no ambiente escolar. Vários autores têm defendido a visão da escola como forte aliada na disseminação de boas práticas de consumo, através do desenvolvimento de conceitos simples e contextualizados que contribuirão para a autonomia financeira e a administração do dinheiro dos jovens, proporcionando-lhes uma melhor qualidade de vida (GUIMARÃES, 2018). É fundamental, portanto, a inclusão da Educação Financeira como parte do currículo nas escolas desde as séries iniciais. Além disso, outras ações devem ser traçadas visando alcançar as demais faixas etárias da população. Como ressalta

Meneghetti Neto (2014), tanto os adolescentes quanto os adultos continuam se endividando devido ao seu analfabetismo financeiro, o qual contribui para a diminuição da poupança e restringe o nível de investimentos no país.

Imprescindível para uma boa prática financeira, o controle do próprio orçamento não faz parte do cotidiano das famílias brasileiras. Conforme mostrou pesquisa[1] realizada pela Confederação Nacional de Dirigentes Lojistas (CNDL) e pelo Serviço de Proteção ao Crédito (SPC Brasil), 48% dos brasileiros não adotam nenhum método para controlar suas finanças, enquanto os 52% restantes o fazem com uma frequência de análise de orçamento inadequada. Este levantamento mostrou ainda que o planejamento do mês com antecedência, considerando a expectativa de receitas e despesas do mês seguinte, é feita por apenas 33% dos entrevistados (CDL, 2020). Além disto, somente 15% dos consumidores entendem corretamente o conceito de endividamento, apontando "corretamente, que alguém endividado tem o pagamento de parcelas a vencer de compras realizadas a prazo ou de empréstimos feitos" (SPC, 2019).

No Brasil, o número total de cartões (débito, crédito e de lojas) chegou a 748 milhões em 2012, o que corresponde a aproximadamente quatro cartões por habitante (MENEGHETTI NETO *et al.*, 2014). Atualmente, o Brasil tem a maior quantidade de cartões de crédito e débito em circulação da América Latina, com mais de 513 milhões, sem incluir os cartões emitidos pelas lojas (MINSAIT, 2020). Considerando que os cartões são uma das modalidades mais caras de crédito, e que falta conscientização financeira aos brasileiros, a situação é preocupante. A facilidade ao crédito aliado ao descuido com suas finanças pode aumentar o consumo além do poder de compra do indivíduo. Devido às altas taxas de juros praticadas

1 - A margem de erro é de 3,5 pontos percentuais para um intervalo de confiança de 95%.

por esta modalidade, isto levará inevitavelmente a uma situação de inadimplência e, consequente endividamento. De acordo com Meneghetti Neto *et al.* (2014) estes fatores irão ser responsáveis pela diminuição do faturamento das empresas e a perda de arrecadação do governo. No início de 2020, existiam

> 61 milhões de brasileiros com o nome negativado no [...] (SPC). Segundo o Banco Mundial, apenas 3,64% da população economiza para a aposentadoria, um dos índices mais baixos do mundo: a média na América Latina é de 10,6% […]. Além disso, apenas 28% dos brasileiros declaram ter poupado algum dinheiro nos últimos 12 meses, o 14.º pior índice do mundo (SPERANDIO, 2020, p. 1).

Na última pesquisa internacional sobre competências de alfabetização financeira de adultos, realizada pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE)[2], o Brasil apareceu na 27ª posição entre as 30 nações que compõem a entidade (OECD, 2016). Nesse estudo apenas 58% dos entrevistados acertaram as perguntas sobre o tema inflação e as consequências no orçamento doméstico, bem abaixo da média dos outros países que é de 78% (RIBEIRO, 2016).

Atualmente, “[...] a poupança continua como investimento preferido de nove em cada dez brasileiros [...]. Porém, com a queda da Selic, a caderneta deve render menos do que a inflação em 2020, o que significa uma perda no poder de compra” (SPERANDIO, 2020, p. 1). Isso demonstra claramente a falta de conhecimento do brasileiro no tema.

Portanto, faz-se necessário instruir os cidadãos sobre o trato com seu dinheiro, o que inclui conhecimentos básicos sobre temas diversos, tais como financiamentos, taxas de juros, investimentos, cartão de crédito, empréstimos consignados, poupança, inflação (VIEIRA FILHO, 2019).

---

2 - Em inglês, *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD).

Neste sentido, partindo de uma breve análise do atual cenário da Educação Financeira no Brasil, este trabalho sugere ferramentas que, a partir das competências estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), contribuam para a inclusão da Educação Financeira no programa de matemática do ensino médio, objetivando fomentar a cultura de planejamento, prevenção, poupança, investimento e consumo consciente.

Educação Financeira no Brasil

De acordo com a análise de Meneghetti Neto *et al.* (2014), a crise do mercado imobiliário e financeiro americano em 2008, com consequente impacto na economia mundial, fez com que vários países concluíssem que não há condições financeiras de manter uma máquina pública com uma carga tributária a níveis tão altos quanto os praticados atualmente. Especialmente em países emergentes e desenvolvidos, os governos necessitam encontrar caminhos para a redução de gastos e um maior acompanhamento das suas consequências na economia, a fim de reduzir dívidas e encargos (VIEIRA FILHO, 2019). Nesta perspectiva, a Educação Financeira passa a ser um complemento fundamental da conduta do mercado e da regulamentação prudencial, uma vez que é uma responsável direta pela melhoria dos comportamentos financeiros dos cidadãos (OECD, 2005).

Devido a isto, vários países foram levados a criar políticas públicas para fomentar a Educação Financeira com o propósito de melhorar seus níveis de desenvolvimento social e econômico (AEF BRASIL, 2010). Entre essas políticas, podemos destacar a criação das estratégias nacionais de educação financeira, que no Brasil ocorreu com a instituição da Estratégia de Educação Financeira (ENEF), através do decreto n.º 7.397, de 22 de dezembro de 2010, com “[…] a finalidade de promover a educação financeira e previdenciária no país [...]” (BRASIL, 2010). Esse decreto também criou o Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF), que foi o responsável pela gestão da ENEF até 2019, quando foi extinto (BRASIL, 2019). Em 9 de junho de 2020, o decreto pelo n.º 7.397 foi revogado pelo decreto n.º 10.393 (BRASIL, 2020), que que institui a nova ENEF e criou o Fórum Brasileiro de Educação Financeira (FBEF), que substitui o CONEF, sendo agora o responsável pela governança da ENEF e pelo estímulo à realização de ações educativas por parte das entidades públicas e instituições privadas que possuem interesse nos temas de educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal, assim como pela divulgação de suas ações à sociedade (DECRETO..., 2020). Espera-se, portanto, que a implementação da nova ENEF amplie o alcance das ações voltadas a estas temáticas em âmbito nacional.

Dentre suas diretrizes, a ENEF visa a gratuidade nas ações de Educação Financeira e destaca-se pela diversidade de ações, divididas em programas setoriais e transversais (AEF BRASIL, 2010). Como exemplo de programa setorial tem-se o *Cidadania Financeira*, desenvolvido pelo Banco Central do Brasil (BCB), que faz um acompanhamento do desenvolvimento da cidadania financeira no país (BCB, 2018a). De acordo com o BCB, "Cidadania financeira é o exercício de direitos e deveres que permite ao cidadão gerenciar bem seus recursos financeiros." (BCB, 2018b, p. 29). Nesta definição a expressão *gerenciar seus recursos financeiros* deve ser entendida como "planejar seus recursos, gerenciar os recursos de crédito e poupar ativamente" (BCB, 2018b). Denominam-se programas transversais aos programas e ações no âmbito da ENEF que tem um público-alvo ou temáticas financeiras características, ficando seu gerenciamento a cargo da Associação de Educação Financeira do Brasil (AEF-Brasil). Destacam-se o *Programa Educação Financeira de Adultos*, a *Semana Nacional de Educação Financeira* e o *Programa de Educação Financeira nas Escolas*[3].

3 - Dada a recente reformulação da ENEF, a extinção do CONEF e a criação do FBEF ainda não se sabe como ficarão organizadas estas ações futuramente, tanto dos programas setoriais quanto transversais.

Para o propósito do presente trabalho, a ação da ENEF que merece destaque é a criação de material didático composto de uma coleção de livros sobre Educação Financeira para o ensino fundamental e médio, e a criação de vídeos e *games*. Essa iniciativa tem levado além de material pedagógico, treinamento para professores de escolas públicas e privadas.

Nos livros do Ensino Médio da coleção *Educação Financeira nas Escolas* destacam-se temas como cartão de crédito, financiamento, habitação, consumo, poupança, previdência, investimentos e planejamentos (CONEF, 2013a; CONEF, 2013b; CONEF, 2013c), que são de extrema importância, pois impactam na vida financeira dos indivíduos e seu conhecimento ajudará na tomada de decisão e na sua sustentabilidade financeira. Em todos os módulos é destacada a importância de um planejamento financeiro em qualquer atividade que o indivíduo venha realizar, por mais simples que seja. As orientações dos livros sempre convergem para o controle das despesas e receitas, levando os alunos a incorporá-lo em sua prática diária. Além disso, nos livros do Ensino Médio são utilizadas situações corriqueiras da vida dos alunos, apresentadas em linguagem coloquial, facilitando a compreensão e estimulando a leitura. O glossário no final do livro contribui para uma leitura mais rápida e um melhor entendimento dos textos, sobretudo em razão da utilização de muitos termos técnicos que podem ser desconhecidos (VIEIRA FILHO, 2019).

Destaca-se também a forma criativa que os assuntos são apresentados, onde se percebe a preservação dos conteúdos programáticos, porém de uma maneira integrada com diversas áreas do conhecimento. As situações utilizadas para trabalhar a Educação Financeira no material, quase sempre, envolvem conhecimentos de outra disciplina e algum tema transversal como ética, meio ambiente, esporte e lazer, trabalho, pluralidade cultural, entre outros.

Finalmente, o fato do material ser gratuito e está disponível na internet é um aspecto que estimula sua adoção, pois além de representar economia, tão importante em uma época de crise, o aluno pode baixar o livro em seu computador ou *smartphone*, contribuindo com a preservação do meio ambiente.

Educação Financeira nas escolas

Para fomentar a cidadania financeira no país é necessário incluir a temática Educação Financeira nos currículos e capacitar os professores para que sejam capazes de inseri-la em diversas abordagens dentro de suas respectivas áreas de conhecimento. O Conselho Nacional de Educação (CNE) decidiu adotar a Educação Financeira nas escolas brasileiras, conforme diretrizes da BNCC (BRASIL, 2017). Apesar dessa obrigatoriedade ter sido estabelecida em 2017 somente começou a ser aplicada em 2020, de forma que redes de ensino públicas e privadas de todo o Brasil devem ajustar o currículo e abordar o tema de Educação Financeira, desde a educação infantil até o ensino médio. Vale ressaltar que o tema não será uma disciplina parte da grade, cabendo às unidades de ensino abordarem o conteúdo de forma transversal, nas disciplinas lecionadas, conforme o plano pedagógico de cada escola (PINHEIRO, 2020).

Em 2018, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), cujo foco foi leitura, incluiu novamente em sua pesquisa uma avaliação, opcional, da alfabetização financeira dos jovens cujos resultados foram divulgados em relatório em 2020[4].

> Alfabetização Financeira é o conhecimento e a compreensão dos conceitos e riscos financeiros, e as habilidades, motivação e confiança para aplicar esse conhecimento e compreensão, a fim de tomar decisões efetivas em vários contextos financeiros, para melhorar o bem-estar financeiro dos indivíduos e da sociedade, e possibilitar sua participação na vida econômica (OECD, 2020, p. 43, tradução nossa).

4 - No Brasil, 10691 estudantes, em 638 escolas, completaram o PISA 2018, representando 2036861 estudantes de 15 anos (65% da população total de 15 anos).

Dentre os vinte países e economias analisados no PISA 2018 (OECD, 2020), o Brasil obteve uma média de 420, muito abaixo da média de 505 dos países da OECD[5], ocupando a décima sétima posição do *ranking* de competência financeira de jovens. Apesar do resultado ruim, o Brasil registrou uma melhora em relação ao resultado anterior. No PISA 2015, quando a média dos países da OECD foi de 489, o Brasil obteve uma média de 393 (OECD, 2015), ocupando a última posição entre as quinze nações avaliadas. Conforme destaca Prado (2020, p. 1), apesar de da ENEF ter sido criada há 10 anos, "o Brasil ainda tem sérias dificuldades para formar pessoas que possuam uma relação saudável com o dinheiro que recebem e gastam."

Pode-se buscar as razões para isto na realidade das escolas do país. Siqueira e Duarte (2019) destacam que, de acordo com levantamento realizado pela AEF-Brasil, a quantidade de escolas com Educação Financeira em seus currículos ainda é muito pequena, sendo a situação das instituições do centro-oeste e nordeste a mais grave. Segundo os autores, estas regiões representam 7% e 8%, respectivamente, das escolas nacionais que trabalham com conteúdo de Educação Financeira. Para Prado (2020) a situação tem mostrado melhora nos últimos cinco anos, pois dados da AEF-Brasil mostram que "iniciativas de educação financeira aumentaram em 72% no país" no período, "contabilizando 1,3 mil projetos sobre o tema, idealizados por escolas e outras entidades".

No estado da Bahia, a prática da Educação Financeira nos colégios do ensino básico ainda se encontra em fase embrionária. Embora algumas escolas particulares baianas já tenham em seus currículos a disciplina *Educação Financeira*, muitas delas com o objetivo principal de contribuir para a diminuição da inadimplência

5 - A média de todos os países/economias foi de 478, conforme dados disponíveis em https://doi.org/10.1787/888934124090.

(NATIVIDADE, 2018), a situação das escolas públicas é certamente mais delicada, pois são elas que possuem "mais matrículas e resultados piores" (PRADO, 2020, p. 1).

Além do óbvio aporte para a cidadania financeira, em termos de tomada de decisões mais conscientes enquanto consumidores, e habilitação para avaliar quais produtos financeiros serão mais adequados para si, de acordo com seu perfil e objetivos, a adoção de medidas para implantação da Educação Financeira nas escolas também pode contribuir para uma cidadania ambiental. Isto é, estes jovens serão futuros consumidores que irão fazer uso racional de recursos naturais como, por exemplo, água, petróleo, energia elétrica e tantos outros, essenciais à saúde e à qualidade de vida da população. Portanto, a educação financeira deve ser explorada não apenas nas aulas de matemática, onde receberá uma abordagem mais formal no âmbito da Matemática Financeira, mas também em diversas áreas do conhecimento, devido ao seu caráter interdisciplinar e transversal. Assim, estes conteúdos devem ser integrados à matemática, à língua portuguesa e às ciências humanas.

Se por um lado a Educação Financeira nas escolas está apenas engatinhando, por outro lado, o uso das Novas Tecnologias se faz cada vez mais presente nas escolas brasileiras (VIEIRA FILHO, 2019). Dentre estas novas tecnologias, destaca-se a utilização dos aplicativos matemáticos.

Neste trabalho, utiliza-se o *software* de matemática dinâmica GeoGebra (IGI, 2020) como ferramenta didático-pedagógica na compreensão e resolução de exercícios propostos no material didático disponibilizado pela ENEF, através de uma proposta do uso do aplicativo em algumas atividades desse material, objetivando o alcance das metas propostas para a área de *Matemática e suas Tecnologias* previstas pela BNCC.

Matemática Financeira versus Educação Financeira

É importante distinguir entre *Educação Financeira* e *Matemática Financeira*. Conforme destaca Assaf Neto (2016), a Matemática Financeira estuda essencialmente o valor do dinheiro no decorrer do tempo, tendo por finalidade básica fazer comparações e análises dos diversos fluxos de caixa de entrada e saída em diversos momentos. Desta forma, a Matemática Financeira faz uso de conceitos matemáticos (conhecimentos teóricos) e os aplica em análise de dados financeiros, de modo geral. Isto é, analisa questões voltadas para como o valor do dinheiro no tempo – juros e inflação – é aplicado a situações como empréstimos, investimentos, cálculo de riscos em um dado projeto financeiro, dentre outras aplicações. Por outro lado, a Educação Financeira tem por meta formar consumidores capazes de administrar com sucesso seus rendimentos, auxiliando-os na tomada de decisões que envolvam poupança e investimento, bem como a difusão do consumo consciente e prevenção de fraudes. Como avalia Perciano (2014), pode-se encontrar tanto indivíduos que não possuem (ou possuem muito pouco) conhecimento de Matemática Financeira, mas não encontram-se endividados e são possuidores de reservas financeiras para emergências, quanto indivíduos com muito conhecimento sobre Matemática Financeira que se encontram completamente endividados e "vivendo um padrão de vida fora da sua realidade financeira."

Devido à complexidade das operações financeiras atuais é preciso ser possuidor tanto das habilidades ligadas às emoções, hábitos e atitudes advindas da Educação Financeira, quanto das competências técnicas próprias da Matemática Financeira. Por isto, é importante que as escolas, que já possuem em seus currículos de Matemática vários temas da Matemática Financeira, adotem um tratamento transversal da Educação Financeira associando-a aos diversos blocos de conteúdos matemáticos, e não somente ao estudar conteúdos como porcentagens, descontos, juros simples ou compostos, ou amortizações, que são os temas de Matemática Financeira geralmente encontrados nos livros-texto de Matemática. “A proposta de discutir a Educação Financeira como tema transversal no currículo de Matemática, pode trazer importantes elementos para as salas de aula, contribuindo para a aprendizagem dos alunos” (CAMPOS, 2012, p. 15).

Na atual conjuntura econômica do país, é de fundamental importância saber poupar, investir, e utilizar o dinheiro de forma racional para que se tenha uma vida financeira equilibrada. Por esse motivo, ter conhecimento dos elementos fundamentais que compõem a Matemática Financeira, tais como juros, montante, acréscimos, desconto, taxas de juros e amortização, é indispensável na compreensão das operações financeiras presentes no cotidiano.

Material ENEF e BNCC

Documento de caráter normativo do Ministério da Educação (MEC), a BNCC define os conhecimentos e habilidades essenciais que todos os alunos da Educação Básica têm o direito de aprender, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE). Em 2017 foi homologada a parte relativa à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental, enquanto a parte relativa ao Ensino Médio foi homologada em 14 de dezembro de 2018, e os novos currículos do Ensino Médio passaram a ser implantados gradualmente a partir do início do ano letivo de 2020.

Para o ensino médio, a BNCC estabelece aprendizagens organizadas por áreas do conhecimento (*Linguagem e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas*). Na área de *Matemática e suas Tecnologias*, a BNCC propõe a solidificação, a ampliação e o aprofundamento de conhecimentos vistos no Ensino

Fundamental, levando o estudante a perceber a Matemática de forma integrada, contribuindo para seus usos diversos e aplicações cotidianas. Com isso, espera-se que esses novos conhecimentos específicos aumentem a capacidade de abstração e reflexão dos estudantes, facilitando a elaboração e resolução de problemas também nas outras áreas do conhecimento. Assim, o estudante utilizará a Matemática de forma mais autônoma. “Segundo a BNCC, embora cada habilidade esteja atrelada a uma competência, isto não significa que algumas delas não contribuam para o desenvolvimento de outras” (VIEIRA FILHO, 2019, p. 42). Espera-se que ocorra uma mudança profunda na educação brasileira trazendo novas perspectivas para a educação financeira.

Uma vez implantada a BNCC, pergunta-se: será que os livros didáticos da coleção *Educação Financeira nas Escolas* da ENEF para o ensino médio (CONEF, 2013a; CONEF, 2013b; CONEF, 2013c) são uma boa alternativa de material a ser usado nas aulas de Educação Financeira ou de Matemática? Até que extensão eles oportunizam o desenvolvimento das competências e habilidades estabelecidas na BNCC para a área de *Matemática e suas Tecnologias*?

A seguir, são feitas algumas considerações a esse respeito, e também envolvendo as habilidades atreladas a essas competências no que tange ao ensino da *Matemática Financeira* e *Funções*, bem como o uso da *Tecnologia* para aprendizagem desse conteúdo. Observa-se que: **(a)** O material consegue fomentar o desenvolvimento da *competência específica 1* (BRASIL, 2017, p. 532) já que ele favorece a aquisição de habilidades como a de interpretar taxas e índices socioeconômicos (taxa de inflação, taxa de juros, índice de desenvolvimento humano, dentre outros) para compreensão da realidade, o que contribuirá para a formação de cidadãos críticos e reflexivos não só na área de Educação Financeira e Matemática, mas também, nas áreas de Ciências Naturais e Humanas. **(b)** Os livros contribuem parcialmente com o desenvolvimento das habilidades da *competência específica 2* (BRASIL, 2017, p. 534) que, na verdade, é uma extensão da competência 1. Isso se dá na medida que discute temas como planejamento familiar, juros simples e juros compostos, conhecimentos importantes na tomada de decisões. Porém deixa a desejar na utilização de aplicativos e planilhas. **(c)** O material não atende completamente às necessidades para o desenvolvimento de habilidades da *competência específica 3* (BRASIL, 2017, p. 535). Apesar do livro trabalhar situações-problema, a sua reflexão sobre os resultados com a mudança de algumas variáveis fica comprometido, pois o livro não oferece um embasamento teórico em alguns conteúdos como função linear, função exponencial, função logarítmica. Com isso a aquisição de habilidades como interpretação de dados, construção de modelos, resolução e formulação de problemas fica comprometida. **(d)** Os livros não são adequados para o desenvolvimento das habilidades envolvidas nas *competências específicas 4 e 5* (BRASIL, 2017, p. 538-541), pois, não apresentam atividades ou situações-problema envolvendo gráficos de funções, e não utilizam qualquer tipo de *software* como ferramenta para análise do comportamento de funções.

Conclui-se, portanto, que a coleção *Educação Financeira nas Escolas (Ensino Médio)* se mostra como um material que pode contribuir bastante para despertar o interesse do aluno pelos conceitos próprios da Matemática Financeira, principalmente devido à escolha dos temas abordados e sua linguagem. Entretanto, os livros necessitam ser adequados para apresentar maior rigor matemático e fomentar o uso de tecnologias no processo de ensino aprendizagem, para que ele seja utilizado com maior eficácia nas aulas de Matemática, e possam atender às recomendações da BNCC para essa área. Com este objetivo, a seguir é proposta a utilização de uma ferramenta tecnológica em parceria com o material da ENEF, e seu uso é exemplificado através da abordagem de uma situação-problema apresentada neste livro 2 do ensino médio (CONEF, 2013c, p. 174).

Uso do GeoGebra

Conforme dito anteriormente, os livros da ENEF tratam da Educação Financeira a partir da ótica de que esta é “um dos principais instrumentos de análise e aconselhamento das pessoas na gestão do seu dinheiro” (VIEIRA FILHO, 2019, p. 52). Sugere-se aqui que o potencial dessa ferramenta será melhor aproveitado se houver um aprofundamento nos conteúdos de Matemática Financeira em parceria com a utilização de Novas Tecnologias, durante as aulas de Matemática. É importante aliar a abordagem dos livros de Educação Financeira com um tratamento da temática Matemática Financeira, dando maior rigor na questão da utilização de fórmulas, pois “elas ajudam a validar conjecturas estabelecidas a partir do processo de investigação e na generalização de certos conceitos.” (VIEIRA FILHO, 2019, p. 52). Tanto o uso das fórmulas quanto a utilização de Novas Tecnologias no processo de ensino-aprendizagem facilitam o cálculo e o entendimento de várias variáveis que estão presentes em no cotidiano do estudante, dentro e fora da escola.

> Em mundo tão globalizado, onde as pessoas interagem a todo momento com outras pessoas utilizando as redes sociais, onde grande parte das transações bancárias são feitas utilizando a internet ou um caixa eletrônico, ou seja, um mundo onde a tecnologia está tão presente, o processo educacional não pode estar alheio a essas mudanças, devendo incorporar as tecnologias nas suas práticas como agente facilitador e motivador (VIEIRA FILHO, 2019, p. 52).

Diante do exposto, a proposta deste trabalho é que o professor faça uso do *software* GeoGebra conjuntamente com algumas situações-problema apresentadas nos livros do Ensino Médio da ENEF a fim de facilitar a compreensão e contribuir com a formulação de novas hipóteses para estas situações-problema. Este será um processo muito mais enriquecedor dentro da aula de Matemática do que a simples leitura e discussão do material da ENEF.

Sendo um *software* de acesso gratuito, para sua utilização será necessário apenas que a escola disponha de computadores em que o GeoGebra possa ser instalado para que os alunos manipulem o programa. Isto pode ser feito no laboratório de informática, caso a escola disponha de um, ou em um computador a ser usado com um projetor multimídia pelo professor na sala de aula convencional a fim de demonstrar a manipulação do programa aos alunos. É recomendado que, se os alunos desconhecem o GeoGebra, lhes seja dado, em aula anterior, orientações básicas de como usá-lo, visando uma otimização do tempo da aula na qual os alunos irão implementar os exercícios e problemas. Além disso, caso a escola disponha de um laboratório de informática, poderá ser feito um plano de aula conjunto entre os professores responsáveis, no qual os estudantes aprenderão o uso do *software* naquela aula, e logo o usarão na aula de Matemática.

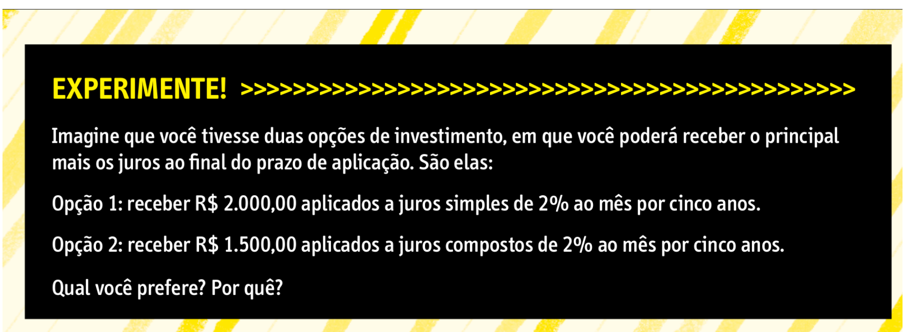
Ressalta-se que este *software* é multiplataforma, podendo assim ser usado nos *smartphones* dos estudantes, ou em *tablets*. Logo, caso não seja possível o uso de computadores, o professor poderá adaptar a sua aula para o uso destes dispositivos de acordo com as possibilidades dos seus alunos e de sua escola.

A seguir, é apresentado um exemplo do uso do GeoGebra em conjunto com uma situação-problema retirada do livro da ENEF. Além desse exemplo, no trabalho de Vieira Filho (2019) foram discutidas as implementações no GeoGebra, através da criação de simuladores, de duas outras situações-problema retiradas do volume 2 da coleção *Educação Financeira nas Escolas* (CONEF, 2013c). Foi elaborada também a sequência didática "*O GeoGebra como ferramenta de aprendizagem da Educação Financeira*", reproduzida na íntegra nos apêndices da dissertação de Vieira Filho (2019, p. 82-89), podendo ser alterada para atender as necessidades específicas de cada professor. Nos simuladores criados foram utilizados recursos gráficos com o objetivo de facilitar a análise da situação pelo aluno. É importante que os alunos construam, eles mesmos, os simuladores a serem utilizados a partir dos tutoriais que demonstram o passo a passo para cada implementação, o que implicará em maior aprendizagem uma vez que os alunos estarão assumindo o papel de criadores ao invés de simples usuários das ferramentas. Estes tutorias podem ser encontrados nos apêndices da dissertação de Vieira Filho (2019, p. 72-81).

Implementação de situação-problema

A situação-problema que será discutida foi retirada de CONEF (2013c, p. 174) e está reproduzida no recorte da Figura 1. O objetivo do livro com este exercício é desenvolver no aluno habilidades para comparar qual a modalidade de capitalização em uma determinada situação é mais vantajosa, através do questionamento sobre o que é preferível escolher, um investimento de um capital de R$ 2.000,00 aplicados a juros simples de 2% ao mês, durante cinco anos, ou um investimento de R$ 1.500,00 aplicados a juros compostos de 2% ao mês, também por cinco anos.

Figura 1 - Situação-problema: investimentos.



EXPERIMENTE! >>

Imagine que você tivesse duas opções de investimento, em que você poderá receber o principal mais os juros ao final do prazo de aplicação. São elas:

Opção 1: receber R$ 2.000,00 aplicados a juros simples de 2% ao mês por cinco anos.

Opção 2: receber R$ 1.500,00 aplicados a juros compostos de 2% ao mês por cinco anos.

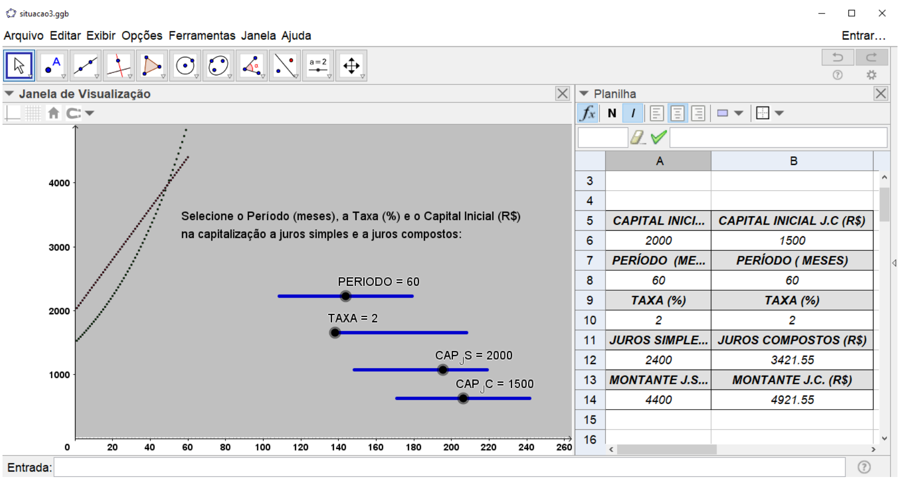
Qual você prefere? Por quê?

Fonte: Recorte de CONEF (2013c, p. 174).

A proposta de implementação dessa situação-problema é que, inicialmente, o aluno siga o passo a passo de tutorial fornecido pelo professor para a construção de um simulador utilizando o *software* GeoGebra. Aqui foi utilizado o simulador construído seguindo o tutorial dado em Vieira Filho (2019, p. 79-81), cuja interface gráfica ao ser finalizado será idêntica ao ilustrado na Figura 2. Uma vez construído o simulador, o aluno passará a etapa de resolução do problema propriamente dito, usando a ferramenta que acabou de desenvolver. Para essa situação-problema, a implementação no GeoGebra se dá através da apresentação de gráficos que demonstram o comportamento das duas opções sugeridas na Figura 1, e de uma planilha de cálculos para fornecer os juros e os montantes de cada aplicação. Foram criados também controles deslizantes para o aluno escolher o capital que ele quer aplicar a juros simples, o capital que ele quer aplicar a juros compostos, a taxa de juros e o período de aplicação, esses dois últimos, comuns às duas modalidades de aplicação.

Após a etapa de criação dos controles deslizantes, foram desenvolvidos mecanismos para o acompanhamento gráfico da situação. Na geração de pontos foi utilizado o comando *sequência* do GeoGebra, e foi criada uma função para representar cada modalidade de capitalização. Assim, serão geradas funções de domínio discreto para traçar pontos cujas abscissas são números naturais de um até o número que corresponde ao período escolhido pelo aluno, através do controle deslizante, e cujas ordenadas são calculadas pela fórmula de montante na capitalização de juros compostos e na capitalização a juros simples. Além dessas funções, foram criadas uma função exponencial e outra, afim, de parâmetros iguais aos valores de capital inicial, período e taxa, escolhidos pelos alunos, através dos controles deslizantes.

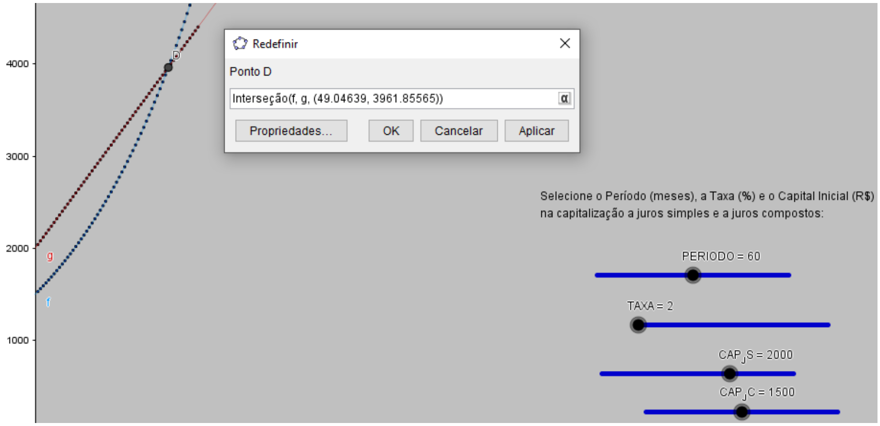
Figura 2 - Interface da situação-problema: Investimentos no GeoGebra



Fonte: Vieira Filho (2019, p. 59).

Percebe-se a vantagem do uso desta ferramenta quando comparada com o uso do livro apenas, pois nele simplesmente é questionado ao aluno qual investimento ele prefere e porquê. Aqui a proposta é fornecer o embasamento teórico necessário ao aluno para responder não só àquelas questões, mas, conforme argumenta Vieira Filho (2019), criar ferramenta que lhe leve a levantar e responder outras indagações, tais como: “Será que em algum momento um capital de R$ 2.000,00, aplicados a Juros Simples de 2% ao ano, será equivalente a um capital de R$ 1.500,00, aplicados a Juros Compostos de 2% ao ano? Em caso positivo, qual esse momento? Por que uma instituição que cobra 2% a.m. de juros (juros de mora), quando você atrasa alguns dias um pagamento, prefere utilizar juros simples? Como você pode justificar a sua resposta utilizando o gráfico?”. A Figura 3, por exemplo, ilustra o gráfico que pode ser construído pelo aluno para responder estes questionamentos através de conteúdo interativo.

Figura 3 - Exemplo de gráfico para comparação das duas modalidades de juros



Fonte: Vieira Filho (2019, p. 60).

Adicionalmente, a criação das funções correspondentes aos juros simples e compostos em um *software* de geometria dinâmica facilita o entendimento das diferenças que há entre uma grandeza que varia seguindo um comportamento linear (proporcional) que, no caso, são os juros simples, e uma grandeza que varia de forma exponencial, como os juros compostos, na medida que as representações algébricas dessas grandezas são convertidas para gráficos de funções do 1° grau e de função exponencial. Portanto, o aluno observa as mudanças nos gráficos à medida que altera as variáveis e isto possibilita uma análise mais profunda e uma melhor compreensão, tanto da natureza dos juros, quanto do significado das funções em si. Além disso, durante a execução da tarefa, o aluno exercita a construção e interpretação de gráficos. Portanto, como não apresenta nenhum tipo de gráfico para demonstrar o comportamento desses tipos de capitalização, o livro deixa a desejar quando vai ser utilizado na aula de matemática.

Em síntese, a utilização desse recurso gráfico potencializa o processo de ensino-aprendizagem desses conteúdos, contribuindo para o desenvolvimento de várias das habilidades estabelecidas na

BNCC para a área de *Matemática e suas tecnologias*, tais como é **(a)** interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso; **(b)** resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas da Matemática Financeira; **(c)** converter representações algébricas de funções do 1° grau, e exponencial, em representações geométricas no plano cartesiano, comparando o comportamento de cada uma delas; **(d)** identificar e associar as progressões aritmética e geométrica, respectivamente, à função afim e exponencial, de domínio discreto, distinguindo qual delas tem o comportamento proporcional.

No lado direito da Figura 2 é mostrada uma tabela, na janela de planilha, para visualização dos valores do *Período do investimento, Capital inicial aplicado a Juros Simples, Valor do Juro Simples, Montante quando o capital é aplicado a Juros Simples, Capital inicial aplicado a Juros Compostos, Valor dos Juros Compostos e Montante quando o capital é aplicado a Juros Compostos*. A utilização de planilhas contribui com o manuseio de expressões algébricas e facilita a visualização dos valores calculados. Igualmente importante, a utilização de planilhas visa desenvolver, no aluno, habilidades de trabalhar com esse tipo de ferramenta, por serem muito utilizadas na vida profissional em diferentes campos de atuação. Vieira Filho (2019) destaca que a construção dessa planilha possibilita que os alunos apliquem conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise deste tipo de ferramenta tecnológica, estimulando esses alunos a criarem outros simuladores, ligados à área financeira ou não, utilizando os diversos aplicativos existentes, que possam auxiliá-los na tomada de decisão de situações do seu cotidiano.

Apesar dos livros da ENEF terem sidos utilizados como instrumento de apoio na elaboração de uma sequência didática para aulas de Matemática Financeira, nada impede que o material da ENEF e

> os simuladores criados sejam utilizados em outros momentos do ano letivo, para atender outros conteúdos de matemática, como exemplificar aplicações de funções afins, funções exponenciais, progressão aritmética (P.A.), progressão geométrica (P.G.), ou até mesmo o aproveitamento de textos destes livros em outras disciplinas como História e Geografia, já que a interdisciplinaridade é um dos pontos de destaque desse material (VIEIRA FILHO, 2019, p. 62).

Conclusão

Como pode-se ver, a Educação Financeira e a Matemática Financeira se complementam como ferramentas essenciais para o desenvolvimento de uma sociedade na qual seus cidadãos, financeiramente alfabetizados, exercem plenamente seu papel de consumidor, integrado a sua comunidade e ao meio ambiente, atuantes no planejamento para aposentadoria, criação de riquezas e combate à desigualdade.

Considerando-se que o Brasil é hoje um país com alto índice de analfabetismo financeiro, urge que se implemente no currículo a Educação Financeira, de forma eficaz. Quando bem feito dentro da escola, o aluno levará para suas famílias às informações que ali obtiver, auxiliando no processo de divulgação do letramento financeiro. Conforme aponta a BNCC, a Educação Financeira é um tema a ser abordado nas escolas de modo transversal, ou seja, permeando todo o seu processo de aprendizagem. Entretanto, dada a complexidade das operações financeiras atuais, entende-se que é preciso ser possuidor tanto das habilidades ligadas às emoções, hábitos e atitudes advindas da Educação Financeira, quanto das competências técnicas próprias da Matemática Financeira. Diante disso, propõe-se que haja uma abordagem continuada dos temas da educação financeira nas aulas de matemática, mesmo que elas não sejam aulas sobre a matemática financeira.

Para este propósito pode-se adotar os livros da coleção *Educação Financeira nas Escolas* editados pelo CONEF, como foi mostrado aqui. São vários os aspectos positivos desses livros, dentre os quais pode-se citar a diversidade de metodologias, abordagem de situações cotidianas, a escolha dos temas e sua interdisciplinaridade/transversalidade, o fácil acesso ao material, e sua qualidade gráfica. Entretanto, como não são livros de matemática falham em aspectos fundamentais no que diz respeito ao ensino desta disciplina: o material não oferece embasamento teórico dos conteúdos matemáticos, não apresenta fórmulas matemáticas e gráficos, e não incentiva o uso de tecnologias na abordagem dos problemas apresentados.

Para sanar os problemas citados acima, é proposto que se use o *software* GeoGebra como auxiliar na resolução das situações-problema dos livros do ensino médio. Recomenda-se o GeoGebra em detrimento das alternativas disponíveis por este ser um *software* de matemática dinâmica, multiplataforma, livre e gratuito. A partir dessa proposta, foram produzidos tutoriais, simuladores e uma sequência didática, que se encontram disponíveis para consulta em Vieira Filho (2019). A utilização da tecnologia para mediar a aprendizagem desempenha um importante papel de agente motivador e de ferramenta de análise. Ela desperta a curiosidade e a imaginação, "permitindo ao aluno testar novas hipóteses, que tenham mais a ver com a sua realidade. Por isso, é importante que os professores insiram essa ferramenta em sua prática docente" (VIEIRA FILHO, 2019, p. 62).

Referências

AEF BRASIL. **Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF)**. 2010. Disponível em: http://vidaedinheiro.gov.br/. Acesso em: 21 jun. 2020.

ASSAF NETO, A. **Matemática Financeira e suas Aplicações**. 13. ed. São Paulo: Atlas, 2016. 287 p.

BCB. **Cidadania financeira**. Brasília, 2018a. Disponível em: <https://cidadaniafinanceira.bcb.gov.br/>. Acesso em: 21 jun. 2020.

BCB. **O que é cidadania financeira?** 1. ed. Brasília, 2018b. 47 p. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2017. 600 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 21 jun. 2020.

BRASIL. Decreto nº 10393, de 09 de junho de 2020. Institui a nova Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF e o Fórum Brasileiro de Educação Financeira - FBEF. **Diário Oficial da União**, Brasília, 10 jun. 2020. Disponível em: <http://www.in.gov.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

BRASIL. Decreto nº 7397, de 22 de dezembro de 2010. Institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF, dispõe sobre a sua gestão e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, 23 dez. 2010. Disponível em: <http://www.in.gov.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

BRASIL. Decreto nº 9759, de 11 de abril de 2019. Extingue e estabelece diretrizes, regras e limitações para colegiados da administração pública federal. **Diário Oficial da União**. Brasília, 11 abr. 2019. Disponível em: <http://www.in.gov.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

CAMPOS, Marcelo Bergamini. **A educação financeira na matemática do ensino fundamental (produto educacional)**. Juiz de Fora (MG), 2012. 43 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012. Disponível em: <https://www.ufjf.br/mestradoedumat/publicacoes/produtos-educacionais>. Acesso em: 20 jun. 2020.

CDL. **48% dos brasileiros não controlam o próprio orçamento, revela pesquisa CNDL/SPC Brasil**. **Sistema CNDL**. 2020. Disponível em: <https://site.cndl.org.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

CONEF. **Educação financeira nas escolas**: Você Aqui e Agora. 1. ed. Brasília: CONEF, v. 1, 2013a. 171 p. (Ensino médio). Disponível em: <https://www.vidaedinheiro.gov.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

CONEF. **Educação financeira nas escolas**: Você Eu, Nós No Mundo!. 1. ed. Brasília: CONEF, v. 3, 2013b. 187 p. (Ensino médio). Disponível em: <https://www.vidaedinheiro.gov.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

CONEF. **Educação financeira nas escolas**: Você Seu Futuro Fazendo Acontecer!. 1. ed. Brasília: CONEF, v. 2, 2013c. 201 p. (Ensino médio). Disponível em: <https://www.vidaedinheiro.gov.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

DE CLERCQ, B. A comparative analysis of the OECD/INFE financial knowledge assessment using the Rasch model. **Empirical Research in Vocational Education and Training**, v. 11, n. 8, p. 1-28, 15 abr. 2019.

DECRETO cria Fórum Brasileiro de Educação Financeira (FBEF). **Banco Central do Brasil**. 2020. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

GUIMARÃES, E R. **A evidente relação entre a matemática básica e a educação financeira**. São Paulo: All Print Editora, 2018.

IGI. **GeoGebra**. 2020. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 21 jun. 2020.

LUSARDI, A.; MICHAUD, P.; MITCHELL, O. S. Optimal financial knowledge and wealth inequality: Volume 125, Number 2 | April 2017. **Journal of Political Economy**, v. 125, n. 2, p. 431-477, abr. 2017.

MENEGHETTI NETO, A. *et al.* **Educação financeira**. Porto Alegre: EdiPUCRS, 2014. 90 p.MINSAIT. **IX Informe Tendencias en Medios de Pago**. **Minsait Payments**. 2020. 208 p. Disponível em: https://mediosdepago.minsait.com/es. Acesso em: 15 jun. 2020.

NATIVIDADE, P. Finanças na sala de aula: escolas ensinam pais e alunos a lidar melhor com o dinheiro. **Correio**. Salvador, ano 2018, 19 fev. 2018. minha bahia. Disponível em: <https://www.correio24horas.com.br>. Acesso em: 21 jun. 2020.

OECD. **Country Note - Brazil**: Results from PISA 2015 Financial Literacy. OECD. Paris, 2015. 5 p. Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa>. Acesso em: 19 jun. 2020.

OECD. **OECD/INFE international survey of adult financial literacy competencies**. **OECD**. Paris, 2016. 100 p. Disponível em: <www.oecd.org>. Acesso em: 15 jun. 2020.

OECD. **PISA 2018 Results (Country Note – Brazil)**. **OECD: Better policies for better lives**. 2019. 11 p. Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa>. Acesso em: 15 jun. 2020.

OECD. **PISA 2018 Results**: Are Students Smart about Money?. Paris: PISA, OECD Publishing, v. 4, 2020. 249 p.

OECD. **Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education**: OECD/LEGAL/0338. Compendium of OECD Legal Instruments. Paris, 2005. 7 p. Disponível em: <https://www.oecd.org>. Acesso em: 20 jun. 2020.

PERCIANO, A. **Diferença entre educação financeira e matemática financeira!** Coaching Financeiro. Maceió, 2014. Disponível em: <http://alvaroperciano.com.br>. Acesso em: 19 jun. 2020.

PINHEIRO, G. Escolas vão ensinar educação financeira a crianças. **Correio Braziliense**. Brasília, fev., 2020. Economia. Disponível em: <https://www.correiobraziliense.com.br>. Acesso em: 19 jun. 2020.

PRADO, M. **Em tempos de crise e inadimplência, como anda a educação financeira no Brasil?** CNN Brasil. São Paulo, maio, ano 2020, 11 mai. 2020. Business. Disponível em: <https://www.

cnnbrasil.com.br>. Acesso em: 19 jun. 2020.

RIBEIRO, A. P. Quando se trata de educação financeira, Brasil fica mal na foto. **O Globo**. São Paulo, ano 2016, 31 out. 2016. Economia: Negócios e finanças. Disponível em: <https://oglobo.globo.com>. Acesso em: 20 jun. 2020.

SIQUEIRA, F.; DUARTE, I. Educação financeira ainda não é realidade nas salas de aula brasileiras. **Especial Focas online**. 2019. Disponível em: <https://infograficos.estadao.com.br/focas>. Acesso em: 15 jun. 2020.

SPC. **Educação financeira**: orçamento pessoal e endividamento. **SPC Brasil**. 2019. 17 p. Disponível em: <https://www.spcbrasil.org.br/pesquisas>. Acesso em: 20 jun. 2020.

SPERANDIO, L. Por que o Brasil é um país de analfabetos financeiros - e como isso atrapalha a nossa vida. **Gazeta do Povo**. Curitiba, ano 2020, 8 fev. 2020. Economia. Disponível em: <https://www.gazetadopovo.com.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

VIEIRA FILHO, W. T. **Matemática financeira: uma proposta para resolução de situações-problema do material da ENEF tendo como ferramenta o GeoGebra**. Cruz das Almas, 89f., 2019. Dissertação (Profmat) - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, 2019. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br>. Acesso em: 20 jun. 2020.

Uma proposta didática do uso do Método da Bissecção

Adson Mota Rocha
Dilmara Maurício do Carmo

Introdução

O trabalho de lecionar matemática no ensino básico no Brasil vem passando nas últimas décadas por vários questionamentos e mudanças tanto por medidas governamentais com criação de orientações pedagógicas e reformulações dos conteúdos a serem trabalhados, quanto por uma reformulação social e tecnológica que exigem empenhos dos professores para se adaptarem à estas turbulências e informações.

A busca sempre pela melhoria do ensino é que faz os professores procurarem cursos de capacitação almejando criar práticas a serem utilizadas no processo de ensino aprendizagem e construção do raciocínio lógico dedutivo. Em Brasil (1999, p. 69-70) diz respeito a prática pedagógica com relação ao trabalho com os conteúdos, com as orientações curriculares e na forma de trabalhar os conteúdos devem sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático, nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva.

O problema de determinar as raízes de uma equação polinomial é, sem dúvida, abrangente e instigante para os alunos, introduzido desde o 8º ano do ensino fundamental. Sabemos que as equações lineares e as equações quadráticas são bastante conhecidas pelos discentes, mas mesmo sabendo da existência de fórmulas de resolução para equações genéricas de terceiro e quarto graus conhecidas, respectivamente, como fórmula de Cardano e de Ferrari, a viabilidade da resolução das equações pelos métodos numéricos é mais interessante a ser apresentado do que estas fórmulas.

Um método iterativo consiste, de modo geral, numa aproximação inicial x_0 e num processo obtém sucessivamente novas iteradas $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ que produz um valor cada vez mais próximo da solução exata. Esses métodos estão associados aos conceitos de iteração (ou aproximação sucessiva) que, em sentido lato, significa a repetição sucessiva de um processo.

A temática de usar métodos iterativos para determinação de raízes de equação polinomiais no ensino médio vem sendo bastante discutido, em especial nos trabalhos finais do curso de mestrado profissional em matemática. Nos trabalhos de Santos (2017), Souza (2017) e Nascimento (2015) foram realizados estudos e discussões sobre os métodos numéricos através de uma revisão bibliográfica e fizeram um enfoque da utilização em aplicações na física ou na própria matemática. Já os trabalhos de Carneiro (2015) e Afuso (2014) foram apresentadas aplicações contextualizadas para o uso do método numérico de Newton-Rapson, cuja preocupação é o estudo destes métodos numéricos e uma abordagem no ensino básico. No entanto, estes trabalhos apresentaram apenas sugestões de inclusão dos métodos iterativos no ensino básico. Durante a nossa pesquisa identificamos o trabalho de Matos (2014) que apresentava uma proposta didática para o estudo de equações do terceiro grau no ensino médio a partir da equação de Van Der Waals como objetivo de inserir na prática pedagógica o método de resolução de problemas.

A utilização dos computadores, calculadoras e / ou celulares vinculamos, apenas, ao cálculo, ao estudo da análise de gráficos e a procura de raízes de equações polinomiais como afirma orientações curriculares sobre o uso da tecnologia como ferramenta para entender a matemática.

> Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o pensar matematicamente, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas (BRASIL, 1999, p. 88).

De maneira geral, as raízes de equações polinomiais não são trabalhadas técnicas e nem há discussão sobre a análise de raízes de equações polinomiais com grau maior que dois no ensino médio, principalmente quando as raízes são irracionais. Utilizar destes questionamentos e retornar aos estudantes como forma de pesquisa, pode-se levantar a necessidade de busca de novos conhecimentos. Nessa perspectiva, a concepção de ensino visualizada nas orientações curriculares como sendo a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação problema ao aluno, ver Brasil (1999, p. 81).

Este trabalho é parte da dissertação de mestrado Profmat (DO CARMO, 2019), que trata de uma proposta didática do uso de um método iterativo para resolução de equações polinomiais no Ensino Médio. O objetivo do presente trabalho é apresentar uma sequência didática do uso do método iterativo da bisseção para aplicar no ensino médio, com finalidade de explorar os conceitos relacionados a equações polinomiais e a determinação de suas raízes. Propomos por meio de um processo de investigação utilizar diferentes recursos tecnológicos e/ou linguagens que auxiliam no trabalho do educador de forma a contribuir para processo de ensino e aprendizagem, além disso, buscar o desenvolvimento e o pensar crítico do discente.

Ainda neste trabalho, mais especificamente, visamos resolver equações polinomiais utilizando o método de bisseção, motivar o estudo do conteúdo de equações algébricas, contribuir para tornar a matemática mais atrativa, interessante e estimulante, sendo fundamental na formação do discente na atualidade e inserir recursos tecnológicos nas aulas de matemática.

Introdução a equações algébricas

Nesta seção faremos uma breve exposição do conteúdo polinômios, equações polinomiais e suas raízes no conjunto dos números reais. Cabe ressaltar que parte das demonstrações das propriedades dos polinômios não serão apresentados neste trabalho, no entanto, são facilmente vistos em Iezzi (2009), Dante (2000) e Medeiros et al. (2013).

Definição 1. Um polinômio na variável real *x* é uma expressão composta da soma de produtos de constantes por potências inteiras positivas de e sempre pode ser escrito na forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

em que n é um número inteiro positivo ou nulo, $a_i,\ i = 0, 1, 2, \dots, n$, são numeros reais chamados coeficientes e as parcelas, $a_i x^i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, são os termos do polinômio.

Quando é atribuído um valor fixo para $x = \alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$ e calculamos

$$P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0,$$

dizemos que *P* (α) é o valor numérico do polinômio para $x = \alpha$. E quando $P(\alpha) = 0$, dizemos que α é raiz do polinômio $P(x)$.

Abordaremos agora sobre a resolução de Equações Polinomiais também conhecidas como Equações Algébricas.

Definição 2. Uma equação algébrica ou polinomial é toda sentença aberta escrita da forma $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio com coeficientes reais.

Um número α é raiz de uma equação algébrica $P(x) = 0$ quando $P(\alpha) = 0$. Entendemos por resolução de uma equação os procedimentos operacionais para obter as suas raízes.

Exemplo 1.

a) Equação linear ou equação polinomial de 1º grau é uma equação algébrica escrita por

$$ax + b = 0,$$

com $a \neq 0$.

A resolução da equação linear é bem simples e sua solução é

$$x = \frac{a}{b}.$$

b) Para a equação do segundo grau,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com coeficientes a, b e c, com $a \neq 0$, obtemos a solução real, desde que $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, são

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad ou \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Esta fórmula é conhecida como *Fórmula de Bháskara*.

c) Para a equação polinomial de terceiro grau particular,

$$x^3 + px + q = 0,$$

em Lima (1991) apresenta o método de Cardano e tem uma solução da forma

$$x = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ainda é possível encontrar maiores detalhes da demonstração da fórmula e a discussão das raízes em Santos (2017).

Métodos numéricos

Nesta seção faremos uma exposição sobre métodos iterativos, que constitui um dos conteúdos discutidos no ensino superior, com objetivo de calcular as raízes de equações $f(x) = 0$, onde $f(x)$ é uma função não linear em x. Em especial os polinômios de grau superior a 3 que servem de base para a sequência didática a ser aplicada em sala de aula do ensino médio.

Restringimos àquelas situações em que conseguimos através de técnicas numéricas obter uma solução aproximada tão próxima da desejada. Estas técnicas produzem uma sequência de aproximações dentro de um intervalo, partindo de uma aproximação inicial e utilizamos o processo repetidas vezes até chegarmos a uma aproximação do valor pretendido dentro de uma tolerância pré-fixada, conceitos estes que veremos a seguir.

Fases da Resolução

Para se calcular uma aproximação de uma raiz, duas etapas devem ser consideradas:

a) *Isolamento:* refere-se à localização ou isolamento das raízes que se baseia na escolha de um intervalo $[a, b]$, que contenha apenas uma raiz.

b) *Refinamento:* consiste em melhorar o valor da raiz aproximada, refinando até o grau de exatidão requerido, ou seja, com a aproximação inicial x_0 encontrada no intervalo $[a, b]$, obter aproximações sucessivas x_n até se obter uma aproximação para raiz dentro de uma precisão pré-fixada, chamada tolerância.

Na etapa do refinamento são utilizados diversos métodos numéricos tais como método da bisseção, da posição falsa e das secantes e o que diferencia esses é a forma como se faz o refinamento. Estes métodos numéricos são chamados de métodos iterativos que consistem em uma sequência de comandos que são executadas etapa por etapa, algumas repetidas em ciclos e a execução de um ciclo dá-se o nome de iteração e as aproximações sucessivas são os termos iterados.

Localização de Raízes

Nesta etapa pode-se esboçar um gráfico através de *software*s matemáticos e/ou calculadoras gráficas e analisar eles verificando as interseções dele com o eixo das abscissas ou então utilizar de resultados de análise matemática importante na aplicação dos métodos numéricos e localização de raízes, dentre eles o mais conhecido como Teorema de Bolzano, que pode vir escrito na forma:
Teorema 1. Seja $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b)<0$, então então existe $c\in(a,b)$ tal que $f\,(c)=0$, ou seja, se a função contínua troca de sinal nos pontos a e b, então f tem um zero entre a e b.

Este teorema apresenta um mecanismo de obter intervalos (a,b) encaixantes, desde que a função f satisfaça as hipóteses, onde possui pelo menos uma raiz real.

No caso de uma função polinomial, sabemos que satisfaz as hipóteses de continuidade exigidas nos teoremas. Assim podemos concluir que:
I. Se $P(a)$ e $P(b)$ tem mesmo sinal, então $P(x)$ possui um número par de raízes reais ou não existem raízes no intervalo $]a,b[$.
II. Se $P(a)$ e $P(b)$ tem sinais contrários, então $P(x)$ possui um numero ímpar de raízes reais no intervalo $]a,b[$.

Tolerância e Critério de Parada

Uma vez que o processo de refinamento gera uma sequência infinita, para se obter uma aproximação exata da raiz são feitos testes que chamamos de critérios de parada. Podemos definir a tolerância ($\varepsilon>0$) como uma estimativa para o erro da aproximação da raiz. Normalmente toma-se $\varepsilon=10^{-m}$, onde *m* é o número de casas decimais exatas que queremos para determinar a raiz. Os seguintes testes de paradas podem ser utilizados:

- $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$ que é o erro função;
- $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ que é uma forma de obter o erro absoluto;
- $\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon$ que é o erro relativo,

onde x_k e x_{k+1} são duas aproximações consecutivas para raiz. Caso um dos testes seja satisfeito truncamos o processo de refinamento e x_{k+1} é a raiz procurada, isto é, tomamos $\alpha = x_{k+1}$ o valor aproximado da raiz na $k+1$- *ésima* iteração com ε a precisão desejada.

Aproximações Sucessivas

Vários métodos iterativos vêm sendo discutidos no ensino superior (ver as referências Sanches e Furlan, 2007; Franco, 2007; Ruggiero e Lopes, 2009; Cunha, 2011) para a determinação de aproximações para raízes isoladas de $f(x) = 0$. Daremos uma apresentação especial às equações polinomiais e ao método de bisseção em virtude da sequência didática aplicada em sala.

Método de Bisseção

O método da bisseção é uma aplicação direta do Teorema de Bolzano. A ideia do método tem os mesmos princípios da sequência de intervalos encaixados que é construída na demonstração do Teorema do Bolzano.

Vamos supor uma equação não linear

$$f(x) = 0,$$

com f contínua e um intervalo inicial $[a, b]$ tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Segue abaixo o algoritmo do método da bisseção. O método da bisseção resulta em boas aproximações para as raízes, após sucessivas aplicações com a finalidade de diminuir a extensão do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão pedida $(b - a) < \varepsilon$, utilizando para isto sucessivos passos de divisões deste intervalo ao meio. Segue abaixo o algoritmo do método da bisseção.

Algoritmo 1

Passo 0: Faça $k = 0$, $a_k = a$ e $b_k = b$;

Passo 1: Defina $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, (Elementos da aproximação sucessiva);

Passo 2: Utilize o Critério de Parada:

Se $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|b_k - a_k| < \varepsilon$ pare e a aproximação desejada é x_k;

Passo 3: Atualização do intervalo:

Se $f(x_k) < 0$, defina $a_{k+1} = x_k$ e $b_{k+1} = b_k$.

Se $f(x_k) > 0$, defina $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$;

Passo k: Faça $k = k + 1$ e volte ao **Passo 1**.

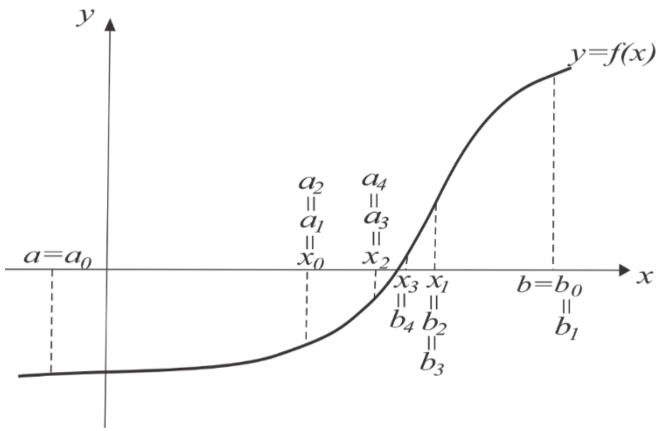
Ao final do algoritmo temos três sequência $a_1, a_2, \ldots$, $b_1, b_2, \ldots$ e x_0; x_1; $x_2, \ldots$ tal que

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Terminado o processo tem-se um intervalo $[a, b]$ que contém a raiz e uma aproximação x_k para a raiz exata. O processo iterativo é finalizado quando se obtém um intervalo cujo tamanho é menor ou igual à tolerância.

Na Figura 1 pode-se ver a interpretação geométrica do método da bisseção.

Figura 1 - Interpretação gráfica do método da bisseção.



Fonte: Elaborada pelos Autores.

A convergência do método da bisseção ocorre sempre que a função $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a).f(b) < 0$, no entanto, essa convergência pode ser muito lenta, pois se o comprimento do intervalo inicial, $b_0 - a_0 >> \varepsilon$ e se ε for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande.

Proposta de atividade

Uma sequência didática, segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), é uma ferramenta que norteia o trabalho do professor na condução das aulas e no planejamento das intervenções, organizando-o de forma gradual, através de um conjunto de atividades interligadas com objetivo de ampliar os conhecimentos dos alunos, a partir de conhecimentos prévios, no processo ensino-aprendizagem.

Nesta seção, apresentaremos uma sequência didática cujo título é “Resolução de equações polinomiais do 3º grau com o método da bisseção”. Particularmente usamos o método da bisseção, por ser mais fácil de aplicação em turmas do ensino médio como afirma Lima (2006, p. 239).

Sequência Didática

O objetivo geral desta proposta é desenvolver o lado investigativo do estudante através da resolução de equações polinomiais pelo método iterativo.

A proposta é que a atividade seja desenvolvida durante o tempo de quatro horas/aulas. Evidentemente que cabe uma observação, que este tempo dependerá da sensibilidade do professor em relação à turma, podendo se estender por mais aulas ou comprimi-las em menos aulas.

Os materiais necessários são praticamente os corriqueiros da prática de ensino, lápis, caneta, papel ofício, apostilas impressas e livro didático. A fim de estimular os alunos faz-se a inclusão da tecnologia com o uso de celulares e/ou computadores. Vale ressaltar que grande parte das escolas e os alunos possuem estes materiais disponíveis.

A seguir uma sequência elaborada em forma de etapas na qual descrevemos suas respectivas estratégias e objetivos.

Primeira etapa

Nesta etapa é feita uma avaliação diagnóstica e revisão das equações polinomiais de 1º e 2º graus.

Inicialmente, propõe-se aos estudantes a resolução das seguintes equações lineares e quadráticas:

a) $2x - 1 = 0$;
b) $2x + 1 = 0$;
c) $-2x - 1 = 0$;
d) $-2x + 1 = 0$;
e) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
f) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
g) $x^2 - x + 2 = 0$.

Objetivo: Resgatar o conhecimento prévio dos alunos sobre equações polinomiais dos 1º e 2º graus vistos durante o ensino fundamental.

Segunda etapa

Nesta etapa é feita uma introdução às equações de 3º grau e generalização.

Apresenta-se as definições para equações de ordem 3 e posteriormente ordem maior. Discute-se sobre a determinação das raízes, apresentando alguns casos específicos, tais como:

a) $x^3 - 81 = 0$;

b) $x^3 - x = 0$;

c) $x^3 + 2x^2 + x = 0$;

d) $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Objetivo: Apresentar uma extensão natural das equações polinomiais para grau maior que 2.

Terceira etapa

Esta etapa apresenta o método de Cardano para equações polinomiais de 3º grau.

Inicialmente faz-se os seguintes questionamentos:

1) 4)Tiveram dificuldade em resolver equações polinomiais de terceiro grau, por exemplo do tipo do item d),

$$x^3 - 3x - 1 = 0?$$

1) 4)Será que tem uma fórmula assim como a fórmula de Bháskara para este caso?

Posteriormente solicita-se que façam uma pesquisa sobre resolução de equações polinomiais de terceiro grau.

Objetivo: Com base nestes questionamentos e na pesquisa realizada, discutir métodos para resolução de equações de terceiro grau e a quantidades de raízes possíveis.

Quarta etapa

Esta etapa contempla a visualização gráfica de um polinômio e suas raízes.

Apresenta-se geometricamente a relação do gráfico de um polinômio e suas raízes, utilizando o GeoGebra como ferramenta computacional, também disponível em aplicativos para celulares.

Objetivo: Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas através do uso de aplicativos no celular.

Quinta etapa

Esta etapa contempla a localização das raízes de um polinômio.

Discutir com os alunos as técnicas para obter um intervalo *[a,b]* tal que exista pelo menos uma raiz do polinômio no interior dele, apresentando uma análise teórica e gráfica da equação *f(x)=0*.

I. Na análise teórica usa-se o Teorema de Bolzano;

II. Na análise gráfica usar as ferramentas computacionais vistas na quarta etapa.

Objetivo: Facilitar a análise teórica e gráfica, de forma simultânea, na localização das raízes de equações polinomiais do 3º grau.

Sexta etapa

Apresentar aos alunos o método da bisseção de forma indutiva e processual estabelecendo um algoritmo para a construção das aproximações sucessivas.

Objetivo: Apresentar o algoritmo do método da bisseção discutindo as suas etapas e os critérios de parada, assim como a convergência do método.

Sétima etapa

Etapa da experimentação. Propõe-se aos estudantes a resolução do seguinte problema:

1) Considere a seguinte equação algébrica $x^3 - 3x - 1 = 0$.

b) a) Determinar o intervalo em que se localiza as raízes. Usar a análise teórica e gráfica;

c)b) Determinar o número máximo de iterações necessárias do método da bisseção para o caso da determinação de uma aproximação da primeira raiz positiva com precisão $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon_1 = 0{,}01$ e $\varepsilon_2 = 0{,}001$;

d) c) Aplicar o método da bisseção e obter a raiz com as precisões do item b);

e) d) Preencher a Tabela 1 com as informações das iterações do método da bisseção.

Tabela 1: Dados obtidos na aplicação do método da bisseção na equação $x^3 - 3x - 1 = 0$.

k	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$	sinal $f(x).f(a)$	Teste

Fonte: Elaborada pelos Autores.

Objetivo: Testarem os seus conhecimentos aprendidos e refletirem sobre o uso do método da bisseção.

Oitava etapa

Nesta etapa é feito um questionário, e a conclusão da sequência didática.

Propor aos alunos que respondam o seguinte questionário. Depois apresentar as respostas corretas e discutir sobre as suas respostas. Tentar durante a discussão introduzir o conceito de convergência.

Nos itens de 1 a 4, marque somente uma alternativa por questão:

1) Se diminuir a tolerância aumenta a quantidade de iterações?
   a) Sim, pois precisará mais iterações para atingir o critério de parada;
   b) Sim, pois a quantidade de iterações aumenta quando fazemos mais cálculos;
   c) Não, pois precisará de menos iterações para atingir o critério de parada;
   d) Não, pois utilizamos a mesma quantidade de cálculos independente da precisão escolhida.
2) Se diminuir a amplitude do intervalo aumenta a quantidade de iterações?
   a) Sim, pois precisará mais iterações para atingir o critério de parada;
   b) Sim, pois a quantidade de iterações aumenta quando fazemos mais cálculos;
   c) Não, pois precisará de menos iterações para atingir o critério de parada;
   d) Não, pois utilizamos a mesma quantidade de cálculos independente da precisão escolhida.
3) Se aumentar a tolerância aumenta a quantidade de iterações?
   a) Sim, pois precisará mais iterações para atingir o critério de parada;
   b) Sim, pois a quantidade de iterações aumenta quando fazemos mais cálculos;
   c) Não, pois precisará de menos iterações para atingir o critério de parada;

d) Não, pois utilizamos a mesma quantidade de cálculos independente da precisão escolhida.

4) Se aumentar a amplitude do intervalo aumenta a quantidade de iterações?

a) Sim, pois precisará mais iterações para atingir o critério de parada;
b) Sim, pois a quantidade de iterações aumenta quando fazemos mais cálculos;
c) Não, pois precisará de menos iterações para atingir o critério de parada;
d) Não, pois utilizamos a mesma quantidade de cálculos independente da precisão escolhida.

5) O que você achou dessa atividade? Descreva colocando os pontos positivos, negativos, suas dificuldades e o que aprendeu.
Objetivo: Verificar o conhecimento do estudante sobre a convergência do método e despertar o interesse pela investigação matemática.

Discussão da Didática

A proposta apresentada não necessariamente precisa ser seguida em sua ordem, podendo ser realizada de forma simultânea ou até mesmo invertendo algumas etapas. Por exemplo, a etapa de visualização gráfica pode ser colocada como primeira etapa a fim de motivá-los devido ao uso de ferramentas computacionais em sala de aula.

É importante salientar a flexibilidade na execução da sequência podendo ser enriquecido com outros tópicos que venham acrescentar outras discussões referentes ao assunto como, por exemplo, a teoria de funções e construção de gráficos.

Sobre o GeoGebra e seu manuseio indicamos a leitura do artigo Junior e Abbeg (2016), que mostra o passo a passo como resolver equações algébricas. Além disso, pode-se consultar a página oficial do GeoGebra[1] onde pode ser encontrado mais detalhes sobre o funcionamento do *software*.

Tivemos uma preocupação na elaboração desta sequência a fim de seguir as orientações propostas nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio, buscando sempre incentivar o lado investigativo dos estudantes e dando uma formação crítica dos conteúdos. Desta forma, a proposta de um questionário no final é que não seja avaliativo de conteúdos, mas buscando que os discentes façam uma autocrítica do seu papel no aprendizado.

Sugerimos que, na sétima etapa, a atividade seja realizada em grupos, sendo duplas ou trios para que não haja dispersões, conversas paralelas e, consequentemente, perda do foco na atividade proposta. Além disso, o trabalho em duplas permite aos alunos uma melhor assimilação dos conteúdos por proporcionar a cooperação e a socialização de conhecimentos entre os mesmos e assim poderem sentir mais tranquilos seja no manuseio do equipamento, seja na linguagem própria para sanar as dúvidas existentes ou mesmo nas discussões para buscar estratégias de resolução dos problemas propostos.

Outra ferramenta que nos nossos estudos percebemos que poderá ser utilizada para o preenchimento da tabela é o uso do *software* Excel da Microsoft, o GeoGebra ou similar, explorando a construção, a interpretação e análise de tabelas através das planilhas eletrônicas.

Relato de experiência

O presente relato de experiência constitui-se num trabalho desenvolvido em uma turma de ensino médio de uma escola pública onde sugerimos a aplicação de um método numérico de fácil compreensão para resolver equações polinomiais de grau maior que 2, diante de questionamentos quanto à existência de uma fórmula para resolver tais equações.

1 - www.geogebra.org.

Na primeira etapa da sequência didática, avaliação diagnóstica e revisão das equações polinomiais de 1º e 2º graus, iniciamos o trabalho com apresentação de equações a serem resolvidas a partir de conhecimentos prévios dos alunos, no entanto, percebemos que a maioria não lembrava os conceitos básicos de equação nem como achar raízes de equação do 1º e 2º graus sendo necessário a intervenção do professor, discutindo etapa por etapa as operações na resolução das equações. Muitos usaram, por exemplo, a fórmula de Bháskara para resolver as equações do 1º grau, o que mostrou que os conhecimentos adquiridos por eles foram apenas de reprodução das fórmulas. Mas à medida que foram sendo revisados os conteúdos, eles perceberam os seus erros, consertando-os, e, diante disso, percebemos uma evolução no aprendizado.

Ainda na primeira etapa, devido notar a dificuldade dos alunos, introduzimos os conceitos para resolução de uma equação incompleta, utilizamos as técnicas da fatoração para resolver equações incompletas do 2º e 3º.

De certa forma, a segunda etapa foi iniciada conjuntamente com o término da primeira. Visto a resolução das equações polinomiais incompletas do 2º e 3º graus chegamos ao problema de resolver equações polinomiais completas do 3º grau, donde iniciamos, quase despercebidos, a terceira etapa o que ocasionou questionamentos quando não conseguiram resolver algebricamente as equações polinomiais do 3º grau, a partir daí sugerimos pesquisar sobre possíveis fórmulas para calcular raízes de equações polinomiais do terceiro grau. Com base na pesquisa, notamos que a fórmula de Cardano não era atrativa para aplicar e os alunos tiveram pouco interesse em utilizá-la. Surgiu por um aluno a seguinte pergunta: “se existe um método mais fácil para calcular?” e, nesse momento, explicamos a possibilidade de utilizar outros procedimentos para cálculo de raízes e foi sugerido o método numérico.

Em seguida, aplicamos a quarta etapa, apresentando o *software* GeoGebra sendo bem recebido pelos alunos, que se mostraram empolgados na instalação e manuseio do programa. Construímos os gráficos de equações polinomiais e comparamos com os resultados obtidos analiticamente em relação às quantidades de raízes, interseção dos gráficos com elas. Os resultados obtidos foram satisfatórios no que diz respeito ao envolvimento, a curiosidade pela aprendizagem de novos conceitos matemáticos e ao uso de "app" de celulares em sala de aula.

Na quinta etapa, localização das raízes de um polinômio, a parte gráfica foi fundamental para o entendimento dos alunos. Inclusive, a análise teórica fundamentamos toda como base no entendimento gráfico e o teorema de Bolzano foi apresentado de forma a ser compreendida pelos alunos, sem enunciá-lo de forma axiomática contida nos livros de cálculos do nível superior. Nesta etapa houve uma participação efetiva de toda a sala querendo apresentar os seus resultados. Notamos que o aprendizado do conceito de raiz de uma função foi atingido e a relação da análise teórica da equação algébrica com a análise gráfica foi importante neste processo.

Mostrado a necessidade do uso do método numérico, abordamos o método de bisseção, sexta etapa da sequência. Durante a exposição dos conteúdos notamos que os alunos não tinham conhecimento do termo de ponto médio, porém um aluno 2 apresentou a seguinte pergunta: "este cálculo não seria uma média aritmética?". Pelo interesse de utilização do *software* GeoGebra mostrado pela turma, fizemos durante a apresentação do método, o uso, a cada etapa do método.

Surgiu um questionamento interessante: como aplicar o método da bisseção para a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$? Ou de forma mais geral, em que o discriminante é zero obtendo raízes reais e iguais, onde no intervalo $[a, b]$ o seu sinal $f(a).f(b) > 0$? No entanto, tem raiz neste intervalo promovendo uma discussão rica que colaborou para possível inserção de outros métodos mais completos.

Para a sétima etapa, experimentação do método, dividimos a turma em duplas ou trios. No que diz respeito ao método de bisseção, um entrave ao conteúdo foi o trabalho com decimais diante da dificuldade dos mesmos em realizar operações tais como multiplicação e divisão sendo sanadas com o uso de calculadoras, além disso, foram detectados também a questão do uso da desigualdade na comparação com a tolerância exigida, além da dificuldade no uso da notação científica.

Ainda no que diz respeito aos cálculos para encontrar raízes percebemos que mesmo promovendo discussões observamos que os alunos queriam encontrar uma solução de forma mais rápida e imediata ao tentar utilizar outros intervalos e precisões requeridas, além de que trabalhamos intensamente durantes três aulas seguidas o que tornou desgastante para os mesmos.

Devido às longas discussões e dificuldades encontradas durante a aplicação da sequência didática, não conseguimos aplicar o questionário por escrito. Foi realizado um debate sobre os conteúdos e uma discussão sobre a convergência do método. Notamos que foi satisfatório a compreensão dos conteúdos sobre métodos iterativos, além disso, observamos a participação de todos durante todo o debate demonstrado em algumas das falas a seguir:

> “Uma experiência divertida, pois foi bem dinâmica e aprendi mais sobre o assunto”.
> “Foi uma experiência incrível, pois aprendi como fazer o “cálculo” de equação do terceiro grau de um método diferente e, também, porque a atividade foi dinâmica”.
> “Achei interativa, me compliquei com os cálculos, achei que era incapaz e a professora me mostrou o contrário”.

Portanto, mesmo que tenham sido detectadas dificuldades na aplicação do método numérico, a apresentação desse novo conteúdo no ensino médio proporcionou aos estudantes pensar matematicamente, usar a tecnologia como ferramenta para entender a matemática e ainda exercer seu protagonismo na aquisição do conhecimento.

Conclusão

Neste trabalho propomos a aplicação de uma sequência didática a alunos do ensino médio visando a apresentação do método de bisseção na resolução de equações polinomiais de grau maior que 2, por ser de simples entendimento para os mesmos, mas antes buscamos apresentar para cada conteúdo alguns conceitos preliminares além de demonstrações de alguns autores da área para embasar a proposta didática aplicada. Sabemos que desde a introdução da álgebra no ensino fundamental, parte dos alunos se interessam pela resolução de equações mas, ao mesmo tempo, sentem dificuldades ao se deparar com fórmulas, o que leva os estudantes apenas a memorizar as mesmas para resolver questões de avaliações.

Um dos desafios aqui é sugerir técnicas de resolução de equações que não estejam presas às fórmulas, mas, apresentação de conteúdos no ensino superior como os métodos numéricos, no ensino médio, de forma a desenvolver nos estudantes o interesse por continuar aprendendo e assim podermos mudar a visão que muitos têm da matemática.

Sabemos que, em geral, quando abordamos a álgebra na resolução de equações polinomiais, os alunos costumam considerar o conteúdo de difícil assimilação o que torna a aula monótona e desinteressante. Diante dessa constatação e realizando pesquisas na área vimos que Sperandio, Mendes e M. (2003) afirmam que para os métodos analíticos difíceis de serem obtidos podemos recorrer a métodos numéricos. Neste sentido, resolvemos sugerir a aplicação de métodos numéricos para resolvermos tais equações de forma a tornar as aulas mais dinâmicas e desafiadoras para os alunos, desenvolvendo o lado investigativo dos mesmos, baseando-se no desenvolvimento de competências como a de interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação seguidas das seguintes habilidades: utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências; resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos e analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos, divulgadas pelo Inep na matriz referência de matemática e suas tecnologias para o ENEM.

Restringimos a resolução de uma equação polinomial de terceiro grau tendo em vista que muitos alunos questionavam sobre a existência de fórmulas para resolução das mesmas e, com base em pesquisas propostas, percebemos que fórmulas como a de Tartaglia desenvolvida no século XVI, são trabalhosas e de difícil compreensão quando aplicadas no ensino médio enquanto que os métodos numéricos podem ser abordados, sem conhecimentos prévios de Cálculo Diferencial, e mesmo que seja necessário buscar uma linguagem adequada para o ensino dos mesmos, por exemplo, a noção de continuidade, aqui sendo apresentado graficamente no estudo de equações polinomiais do tipo $f(x) = 0$ de forma a não existir "quebra" ou "furo" ao longo da sua linha. Além disso, o método de bisseção, na maioria das vezes, necessita apenas de conceitos básicos tais como decimais, ao buscar aproximações para raízes com precisões pré-definidas, o que pode ser facilitado pelo uso de calculadoras simples, da noção de ponto médio quando do uso da função iteração para o método de bisseção e da interpretação e análise de tabelas sendo interessante o uso de planilhas eletrônicas e gráficos que podem ser realizadas através de aplicativos nos celulares como o GeoGebra, e nesse sentido, recomendamos que seja estendido o tempo proposto para a atividade.

Quanto à utilização dos aplicativos de celular é preciso estar atento ao uso de *softwares*, pois a tecnologia pode ser útil quando atender as necessidades dos alunos no que diz respeito a ilustração da situação, na otimização do tempo para efetuar cálculos trabalhosos e na interpretação geométrica do problema em questão e ainda possibilitar o protagonismo dos mesmos de forma que produzam seus próprios conhecimentos e saibam selecionar as informações necessárias a resolução do problema. Isto conforme as orientações curriculares (BRASIL, 2008, p. 89) que afirmam que a escolha de um programa se torna um fator que determina a qualidade do aprendizado.

A maior dificuldade da aplicação foi relativa ao acesso tecnológico dos alunos, pois percebemos que muitos não dispõem de celulares, contornado com a realização de trabalhos em grupos para que todos estivessem inseridos no processo.

Portanto, notamos que os objetivos foram alcançados de forma a contribuir para quebrar paradigmas e promover discussões ao nível acadêmico no que diz respeito à aplicação de métodos numéricos no ensino médio. Além disso, fortalecer a ideia de que esse conteúdo permite ao professor trabalhar de forma integrada com conteúdo de álgebra e geometria aliado às tecnologias, pouco trabalhadas nesse nível de ensino.

Referências

AFUSO, A. Y. **Métodos Numéricos para Encontrar Zeros de Funções: Aplicações para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Estadual Paulista: Júlio de Mesquita Filho, 2014.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e T. S. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC/Semtec, 1999.

CARNEIRO, R. D. S. **Métodos de Resolução de Equações do Terceiro Grau**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Tocantins, 2015.

CUNHA, M. **Métodos Numéricos***.* 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

DANTE, L. R. **Matemática, Contexto e Aplicações***.* 2. Ed, vol. 3. São Paulo: Editora Ática, 2000.

DO CARMO, D. M. **Uma Proposta Didática do Uso de um Método Iterativo para Resolução de Equações Polinomiais no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, 2019.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. **Sequências Didáticas para o Oral e a Escrita: Apresentação de um Procedimento***.* Campinas, SP: Mercado das Letras, 2004.

FRANCO, N. M. B. **Cálculo Numérico***.* 2. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2007.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática***.* 3. ed, vol. 6. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

JUNIOR, R. R. O.; ABBEG, T. P. **História, Resolução Numérica e GeoGebra no Ensino de Equações Algébricas***.* Professor de Matemática Online, v. 4, n. 1, 2016.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias***.* Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E. L. **Análise Real***.* Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MATOS, E. B. de. **Estudo de Equações do Terceiro Grau no Ensino Médio a partir da Equação de Van Der Waals**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, 2014.

MEDEIROS, V. Z.; CALDEIRA, A. M.; SILVA, L. M. O. de; MACHADO, M. A. S. **Pré-Cálculo**. 2. ed. Sao Paulo: Cengage, Learning, 2013.

NASCIMENTO, D. A. de. **Métodos para Encontrar Raízes Exatas e Aproximadas de Funções Polinomias do 4º Grau**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2015.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. de R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, Pearson, 2009.

SANCHES, I. J.; FURLAN, D. C. **Métodos Numéricos**. Universidade Federal do Paraná: Departamento de Informática, 2007.

SANTOS, A. T. dos. **Métodos Resolutivos de Equações Algébricas e Análise das Raízes de Funções Polinomiais**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, PUC-Rio, 2017.

SOUZA, A. G. d. **Resolução de Equações via Métodos Numéricos: Bisseção e Falsa Posição**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Goiás, 2017.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; M., S. L. H. **Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

Problemas de programação linear como temas transversais

Ueric Silva Oliveira
Eleazar Gerardo Madriz Lozada
Adson Mota Rocha

Introdução

Frequentemente somos confrontados em nosso dia-a-dia com situações problemas em que temos que tomar decisões e muitas vezes elas passam pelo viés matemático, algumas dessas situações são classificadas como problemas de otimização. Fazemos o uso do objeto matemático equação linear, onde as variáveis estão sujeitas a restrições que se caracterizam como sistemas de equações ou inequações lineares.

O desenvolvimento tecnológico e o aumento da competitividade das empresas fazem com que a tomada de decisões se fundamente na análise de diversos fatores, tendo como objetivos obter o lucro máximo e/ou então minimizar as despesas e desperdícios. Nestes tipos de problemas podemos afirmar que se deseja alcançar um objetivo, a que devem ser cumpridas restrições que a realidade nos impõe. No caso, em que tanto a função objetivo quanto as restrições envolvidas podem ser modeladas usando funções lineares, teremos então um problema de programação linear (PPL). Caso o problema admita solução inteira então estaremos com um problema de programação linear inteira (PPLI).

Em nossa concepção tais conceitos poderiam ser desenvolvidos com alunos do ensino médio, buscando interdisciplinaridade com temas da geometria analítica com suas representações algébrica e gráfica. Com essa motivação, elaboramos um procedimento para atividades com suporte no ambiente informático GeoGebra, que tem como objetivo favorecer a construção do ferramental matemático que possibilitasse subsidiar o professor de matemática do ensino médio a apresentar alguns problemas de programação linear. Esta proposta é parte do trabalho da dissertação de mestrado Profmat de Oliveira (2016), aplicando a programação linear e a programação linear inteira como suporte para temas transversais no ensino de matemática no ensino médio.

De acordo com Neto (2014), durante o ensino de matemática da educação básica, confrontamos com vários conteúdos ministrados de forma isolada, dentre eles destacamos as equações e inequações lineares, sistemas de equações e inequações lineares, estudados tanto na área algébrica como na área geométrica. Esses conteúdos permitem resolver problemas da matemática aplicada, com enfoque na área de otimização.

Os PPL e os PPLI serão usadas como suporte para temas transversais no ensino de matemática no ensino médio, devido ao fato desses se apresentarem por meio de problemas de natureza aplicada que poderiam motivar os alunos a resolvê-los. Vislumbrando o avanço tecnológico, somos confrontados com novos problemas que enquanto professor/educador devemos ter ao menos ciência de técnicas que possam resolvê-los, por isso acreditamos que os tópicos referentes aos PPL e PPLI servirão como complementaridade no que tange as aplicações de conteúdos de matemática.

Apresentamos os procedimentos com foco nas representações algébrica e gráfica de inequações lineares, o que poderia dar condições aos alunos de construírem conhecimentos a respeito da região viável, conceito fundamental para resolver alguns problemas de programação linear. Além disso, procedemos com as análises das atividades ao final, apresentamos algumas considerações no que diz respeito ao trabalho desenvolvido.

Sendo que nosso objetivo é utilizar a programação linear como suporte para temas transversais no ensino de matemática do ensino médio, dando subsídios para o professor transitar por meio da transversalidade de certos conteúdos trabalhando com problemas de matemática aplicada, além de mostrarmos como o *software* GeoGebra pode ser um auxiliador na resolução dos mesmos.

Pesquisa operacional no Ensino Médio

Segundo Sodré (2007) é notório o impacto positivo que certos métodos analíticos de solução de problemas e tomada de decisão, vem causando nas áreas das ciências políticas, matemática, economia, teoria da probabilidade e estatística, com aplicações diretas em muitas indústrias, inclusive a de aviação e mísseis, automóveis, comunicações, computadores, energia elétrica, eletrônica, alimentos, metalúrgica, mineração, papel, petróleo e transporte.

Esses problemas supracitados são características marcantes nos problemas da pesquisa operacional. Essa é uma ferramenta prática que nos fornece subsídios para a atividade de gestão. Como ferramental quantitativo, ela fornece parâmetros decisórios confiáveis, considera cenários e estabelece, por meio de modelos matemáticos, visualizações de possíveis soluções de problemas que apresentam variáveis, restrições, e função objetivo. Desta forma, a pesquisa operacional se constitui de um moderno instrumental para a tomada de decisões analisadas por meio de cálculos estruturados em fases.

Segundo Taha (2007), há muitos problemas que são resolvidos por técnicas particulares de pesquisa operacional, dentre elas:

Programação Linear (PL): são técnicas usadas para resolver problemas lineares de otimização nos quais a função objetivo e as restrições são todas lineares, esse método tem sido usado com sucesso na solução de problemas relativos à alocação de pessoal, mistura de materiais, distribuição, transporte, carteira de investimento, avaliação da eficiência.

Programação Linear Inteira (PLI): é uma técnica para resolver problemas de programação linear onde as variáveis podem apenas apresentar números inteiros. Tem sido empregada na resolução de problemas de investimento dentre outros;

Diante das várias possibilidades que a pesquisa operacional nos oferece, o conhecimento sobre as subáreas, programação linear e programação linear inteira, revela-se importante para o aperfeiçoamento do trabalho com a transversalidade com conteúdos visto no Ensino Médio.

A pesquisa operacional pode ser apresentada a alunos que estudam no ensino médio, uma vez que a ela requer conhecimentos básicos e pode ajudar o professor a cumprir alguma das orientações curriculares para o ensino médio.

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático - nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva (BRASIL, 2006. p. 69).

Vale salientar que na pesquisa operacional encontramos problemas derivados de sistemas complexos, a estes queremos analisar por meio de um modelo matemático. Tal modelo provém de relações expressas por variáveis, parâmetros e operações, desde que, satisfaçam as proposições derivadas de um conjunto de axiomas da teoria que ali será empregada. Esse processo se assemelha muito ao da pesquisa de um matemático, físico ou engenheiro.

Se por um lado a ideia de situação-problema pode parecer paradoxal, pois como o aluno pode resolver um problema se ele não aprendeu o conteúdo necessário à sua resolução? Por outro lado, segundo Rehfeldt (2009), a história da construção do conhecimento matemático mostra-nos que esse mesmo conhecimento foi construído a partir de problemas a serem resolvidos.

Buscando uma inter-relação entre a realidade física (que provém de um problema procedido de um sistema complexo) e resultados numéricos, os modelos matemáticos se colocam como um agente de tradução e transposição dessas duas realidades, procurando ou propondo instrumentos bem como as técnicas que as justifiquem.

Há problemas reais, que embora pareçam distintos, são resolvidos por modelos matemáticos iguais.

Dentre os vários campos em que são utilizados os modelos matemáticos, Sodré (2007) destaca seu uso na própria matemática, também na economia, física, química, biologia, comunicação, engenharia, astronomia, etc.

De acordo com Rehfeldt (2009) normalmente usamos os modelos matemáticos a fim de simplificar problemas do mundo real ou então buscando convenientemente trabalhar com esses problemas colocando restrições sem perder as suas características essenciais. Representado de forma quantitativa as hipóteses que foram usadas na construção do modelo, as quais ficam apoiadas sobre o sistema real. O tratamento quantitativo provém de um conjunto de equações ou inequações, que visam interpretar as hipóteses nos dando condições de deduzir consequências e localizando detalhes que deverão ser aceitos ou recusados.

Para iniciarmos a resolução de problemas, em geral, devemos coletar e organizar dados em sistemas de informação gerencial de maneira que esses sejam transformados em informação inteligível aos usuários finais. Apresentaremos agora uma forma de tratarmos problemas dessa natureza, por meio de uma atividade:

1) O problema é apresentado, na maioria das vezes, sob forma discursiva e após uma leitura minuciosa, determinamos o objetivo,

identificamos as restrições, coletando as informações com máximo de exatidão;
2) Transcrevemos as informações coletadas para a linguagem matemática, explicitando as equações ou inequações, distinguindo a função objetivo das restrições;
3) Encontramos a solução do problema por meio de técnicas específicas para o problema matemático;
4) Após encontrar a solução ótima do problema, devemos verificar se os resultados atendem ao modelo real do problema. Em alguns casos podemos conferir se novas soluções são necessárias, para tal podemos usar a simulação;
5) Nesse último momento de análise, far-se-á implantação e acompanhamento do sistema num todo, avaliando se é necessário fazer adequações no modelo.

Sustentado nesse tratamento dado aos problemas da pesquisa operacional, congregando esse padrão ao Ensino Médio, as orientações curriculares para o ensino médio destaca o papel da metodologia modelagem matemática como proposta de ensino:

> A modelagem matemática, percebida como estratégia de ensino, apresenta fortes conexões com a ideia de resolução de problemas apresentada anteriormente. Ante uma situação-problema ligada ao “mundo real”, com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado [...] (BRASIL, 2006. p. 84).

Uma vez que ao apresentar a matemática na sequência definição, exemplos e exercícios, o professor seria um mediador, orientando o aluno em face de um problema a ser resolvido. Esse processo se assemelha muito ao da pesquisa de um matemático, físico ou engenheiro.

Atividade didática

Apresentemos a seguir uma proposta de resolução de problemas de otimização a ser propostos aos alunos do ensino médio após ou durante explorados os conteúdos de Geometria Analítica.

Problema: A turma da Isabel decidiu fazer arranjos florais, utilizando flores do horto da escola, para vender no Dia dos Namorados. Idealizaram arranjos formados por rosas e violetas. Dispondo de 35 rosas e 36 violetas. Pensaram formar dois tipos de arranjos, o arranjo Gracioso e o arranjo Formoso:

– O arranjo Gracioso será composto por 5 rosas e 4 violetas, dando um lucro de 2 reais;

– O arranjo Formoso será composto por 7 rosas e 9 violetas, dando um lucro de 3 reais.

Isabel deseja saber a quantidade de arranjos Gracioso e Formoso que ela deve confeccionar, a fim de obter o maior lucro possível com a venda.

Proposta de Resolução: A resolução desse problema segue uma proposta que acreditamos ser viável e pode auxiliar e proporcionar boas discussões em sala de aula, com os alunos.

a) Identifique as variáveis de decisão do problema;
b) Identifique a função objetivo do problema;
c) Identifique as restrições do problema;
d) Escreva-as sob forma de sistema de inequações;
e) Escreva o problema na forma padronizada dos problemas de programação linear;
f) Represente graficamente as restrições do problema;

g) Encontre a região factível gerada pelas restrições e determine seus vértices;
h) Represente graficamente a função objetivo do problema e encontre a reta de nível paralela à função objetivo que permita vender os kits com maior lucro possível.

Resolução:

a) Identificando as variáveis e decisão do problema: Chamaremos de *x* a quantidade de arranjos do tipo Gracioso e *y* a quantidade de arranjos do tipo Formoso, confeccionados por Isabel.
b) Identificando a função objetivo do problema: Devemos obter o maior lucro com as vendas dos arranjos, sendo que a cada arranjo Gracioso vendido teremos um lucro de 10,00 reais e a cada arranjo Formoso vendido, teremos um lucro de 15,00 reais. Reescrevendo essas informações algebricamente, teremos a função lucro:

$$f(x,y) = 2x + 3y.$$

c) Identificando as restrições do problema: De acordo com o problema, temos uma quantidade limitada de flores, ou seja, podemos usar no máximo 35 rosas e 36 violetas. Cada arranjo usa quantidades diferentes de cada tipo de flor. Em relação à quantidade de rosas, temos 5 no arranjo Gracioso e 7 no arranjo Formoso, já em relação à quantidade de violetas, temos 4 no arranjo Gracioso e 9 no arranjo Formoso, além de que essas quantidades de flores não devem ser negativas.
d) Escrevendo as restrições do problema sob forma de inequações:

$$\begin{cases} 5x + 7y \leq 35, \\ 4x + 9y \leq 36, \\ \quad x \geq 0, \\ \quad y \geq 0. \end{cases}$$

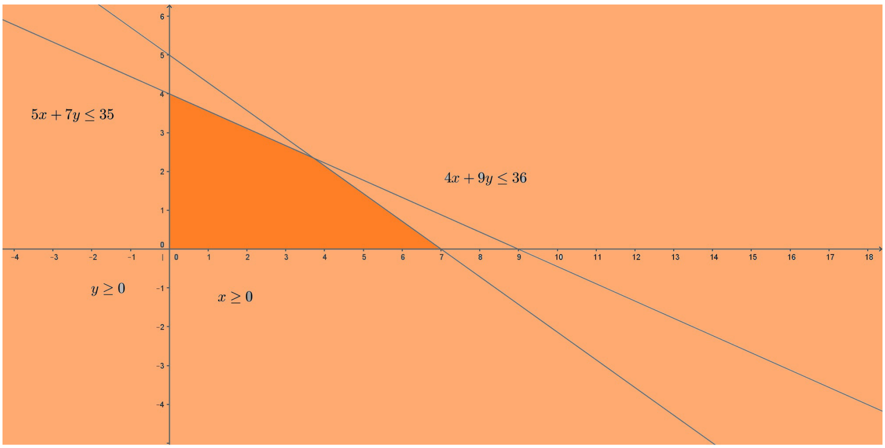
e) Problema escrito na forma padronizada de um PPL: Tendo explicitados a função objetivo e as restrições do problema, podemos então reescrever o problema matematicamente, isso nos facilitará na resolução do mesmo.

$$Maximar\ f(x,y) = 2x + 3y,$$

$$sujeito\ a\ \begin{cases} 5x + 7y \leq 35, \\ 4x + 9y \leq 36, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

f) Representação da restrição graficamente. Plotando as inequações no GeoGebra, iremos encontrar, a partir de cada uma delas, semiplanos, ver Figura 1.

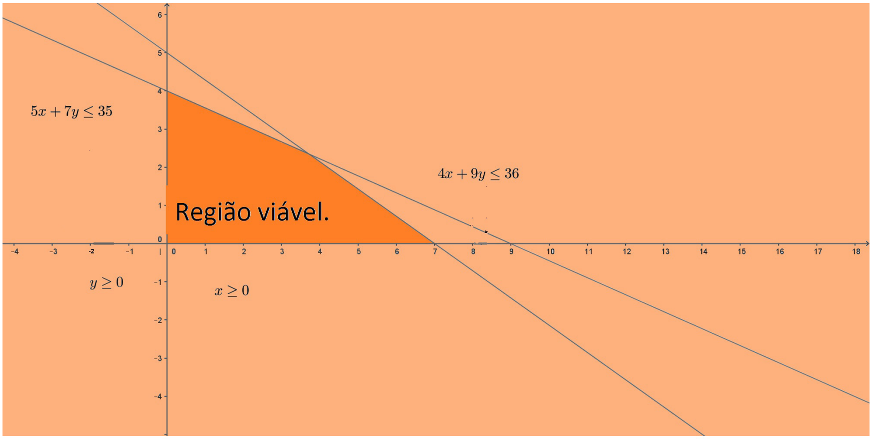
Figura 1 - Representação gráfica das restrições do problema.



Fonte: Oliveira (2016).

g) Encontrando a região viável gerada pelas restrições e determinando seus vértices: Região viável é a intersecção das inequações, na Figura 2 sendo representada graficamente através da parte mais escura do gráfico.

Figura 2 - Região viável em destaque.



Fonte: Oliveira (2016).

Podemos encontrar os vértices da região viável, localizando a intersecção das retas, determinada pelas inequações. No GeoGebra, usando o campo de entrada, digitamos

$$Interseção[< Objeto >, < Objeto >],$$

onde tem o nome $< Objeto >$ colocaremos as equações que extraímos das inequações. Para o vértice A, digitamos:

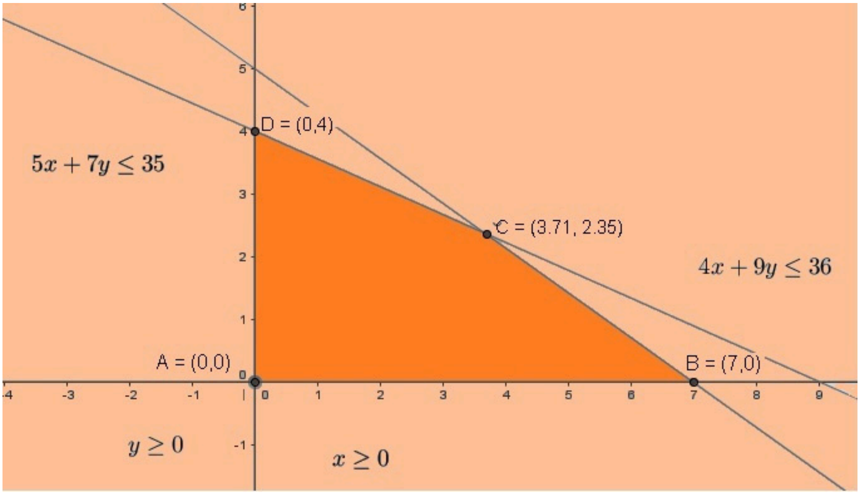
$$A = Interseção\ [x = 0, y = 0],$$

para os demais pontos de forma análoga,

$$B = Interseção\ [5x + 7y = 35, y = 0],$$
$$C = Interseção\ [5x + 7y = 35, 4x + 9y = 36],$$
$$D = Interseção\ [x = 0, 4x + 9y = 36].$$

A Figura 3 ilustra os pontos A, B, C e D.

Figura 3 – Vértices da região viável.



Fonte: Oliveira (2016).

Tendo os vértices da região viável do problema, podemos a partir deles plotar um polígono que nos ajudará e facilitará nossa análise da região viável à procura da solução ótima para o problema. Para tal, ocultaremos os semiplanos determinados pelas inequações e digitaremos no campo de entrada do GeoGebra, Polígno $[< Lista\ de\ Pontos >]$. Na lista de pontos, indicaremos os vértices A, B, C e D,

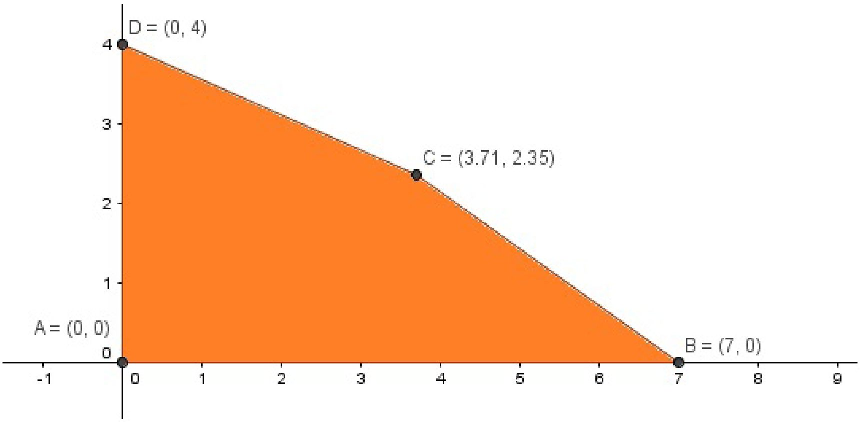
Polígno $[A, B, C, D]$.

Na Figura 4 a representação da região poligonal obtida do resultado do comando acima.

h) Representando a função objetivo: Inicialmente, digitamos na janela de entrada nossa função objetivo, $f(x, y) = 2x + 3y$, mas com lucro zero, ou seja, digitaríamos

$$2x + 3y = 0.$$

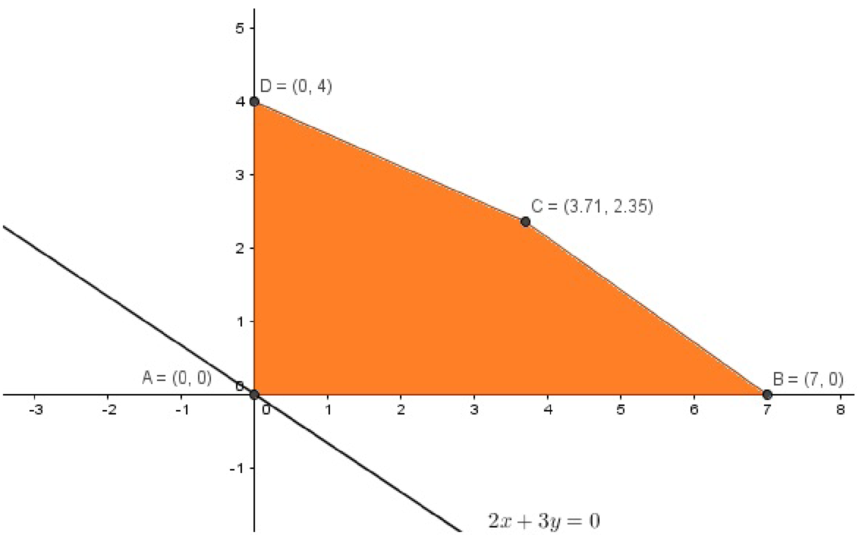
Figura 4 – Região poligonal.



Fonte: Oliveira (2016).

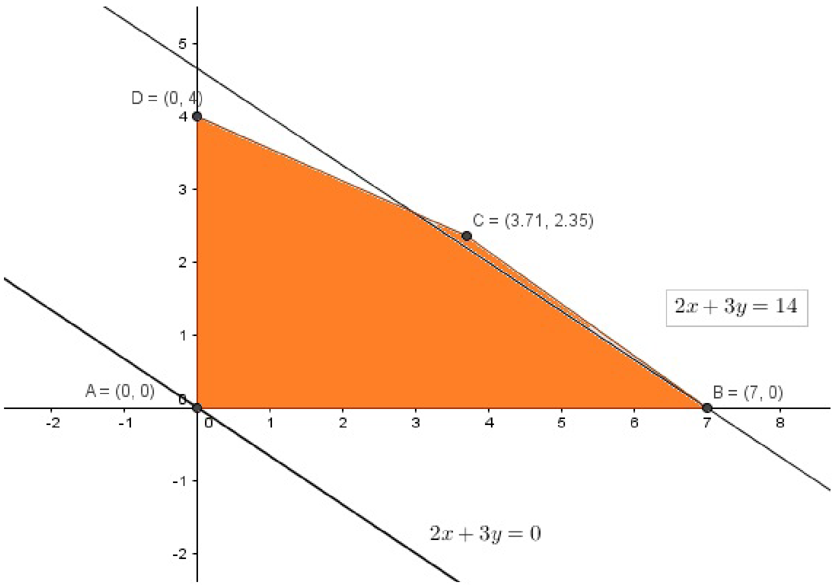
Na Figura 5, a representação desta reta e a interseção no ponto *A*, com a região poligonal.

Figura 5 – Função objetivo aplicado no ponto *A*.



A fim de encontrar a curva de nível obtida por meio da função objetivo que forneça na região viável uma melhor solução para o problema, analisaremos cada um dos três vértices restantes apontando o lucro que cada um deles pode render. Para o vértice B, temos um lucro de 14,00 reais, ou seja, usando apenas 7 arranjos Graciosos. Na Figura 6 a reta $2x + 3y = 14$ e a interseção com a região poligonal.

Figura 6 – Função objetivo aplicado no ponto *B*.



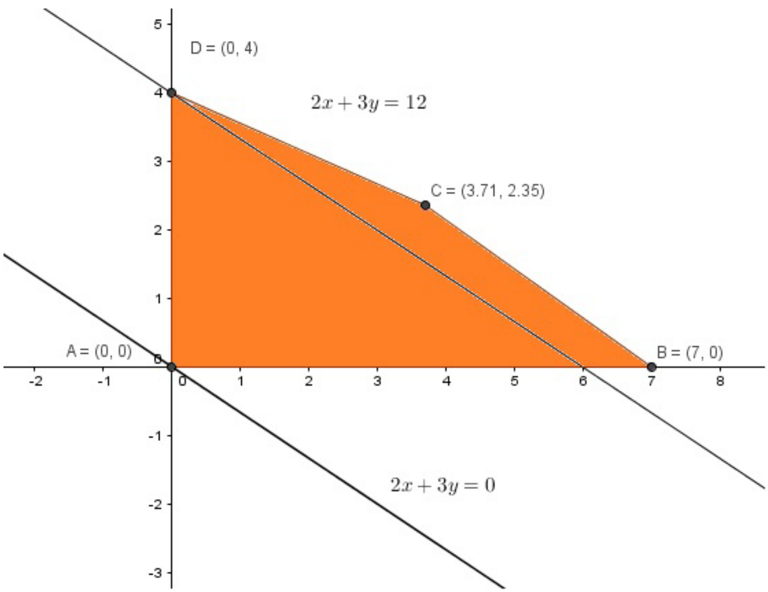
Fonte: Oliveira (2016).

Na Figura 7 temos a análise no vértice *D*, que nos permite obter 12,00 reais de lucro.

No entanto, observamos que para obter este lucro de 14,47 reais, deveríamos vender 3,71 arranjos Graciosos e 2,35 arranjos Formosos. Por outro lado, pelas características do problema, trata-se de um PPL com variáveis inteiras e, desta forma, a quantidade de arranjos a serem vendidas deverão ser representadas por um par de números inteiros não negativos, que embora estivesse implícito no problema não abordamos inicialmente em suas restrições.

Outra maneira de resolver é utilizando de uma estratégia para obter uma solução ótima enumerando todas as possíveis soluções inteiras e calcularmos o valor da função objetivo para todas as soluções viáveis. Para isso, determinamos todos pontos com coordenadas inteiras e escolheremos aquele par ordenado que apresente o maior valor. Esse método é interessante para problemas com uma região viável que possua poucos pontos a serem analisados, pois em problemas com muitos pontos esse método torna-se cansativo e desinteressante. Porém para o problema em discussão, acreditamos que ele possa auxiliar e motivar o aluno a encontrar tal solução, principalmente com o uso do GeoGebra.

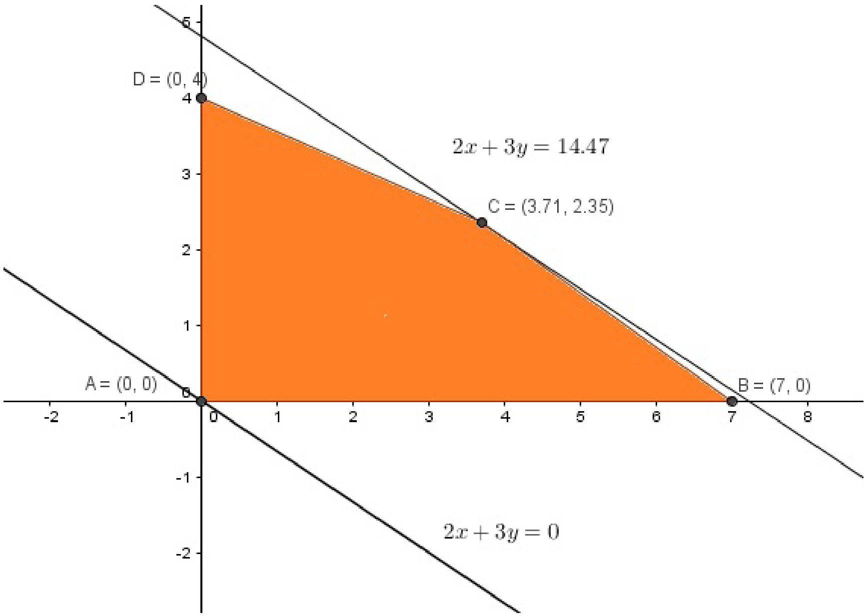
Figura 7 – Função objetivo aplicado no ponto *D*.



Fonte: Oliveira (2016).

Por último, na Figura 8, a análise o vértice *C*, tendo um lucro de 14,47 reais.

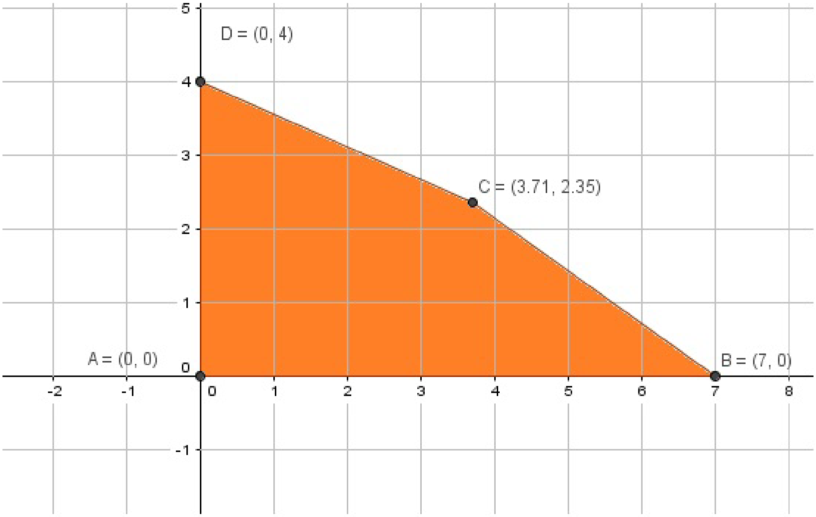
Figura 8 – Função objetivo aplicado no ponto *C*.



Fonte: Oliveira (2016).

Faz-se necessário, a partir da visualização gráfica do problema, encontrarmos um valor que represente a quantidade de arranjos a serem vendidos que nos permita obter um melhor lucro. No GeoGebra, podemos usar a opção malha, que nos permite visualizar os pontos com coordenadas inteiras contidos na região viável mais facilmente. Na Figura 9, temos a região poligonal viável com a malha sobreposta.

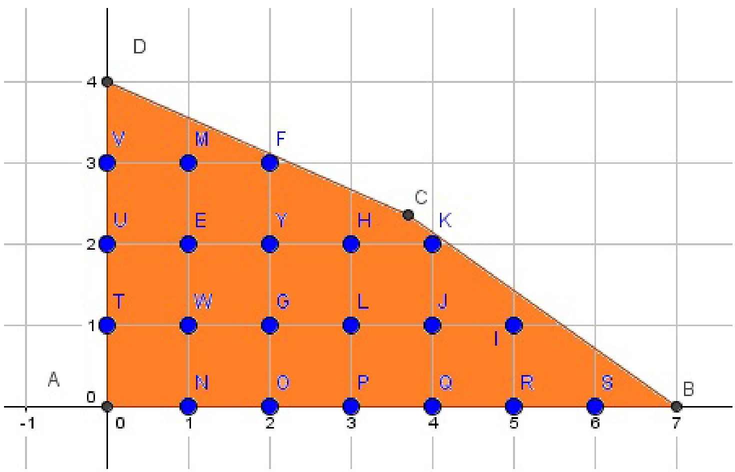
Figura 9 – Janela gráfica com a opção malha ativada.



Fonte: Oliveira (2016).

Tendo visualizado esses pontos, iremos marcá-los, conforme a Figura 10.

Figura 10 – Pontos de coordenadas inteiras contidos na região viável.



Fonte: Oliveira (2016).

Na Tabela 1, consta os cálculos de todos os custos nos pontos de coordenadas inteiras contidos na região viável e podemos analisar qual delas possibilita uma melhor solução para o problema.

Tabela 1 - Dados do valor da função objetivo no pontos de coordenadas inteiras.

Ponto	Arranjos Graciosos	Arranjos Formosos	Lucro
$A\ (0{,}0)$	0	0	$2.0 + 3.0 = 0$
$B\ (7,0)$	7	0	$2.7 + 3.0 = 14$
$D\ (0,4)$	0	4	$2.0 + 3.4 = 12$
$E\ (1,2)$	1	2	$2.1 + 3.2 = 8$
$G\ (2,1)$	2	1	$2.2 + 3.1 = 7$
$H\ (3,2)$	3	2	$2.3 + 3.2 = 12$
$I\ (5,1)$	5	1	$2.5 + 3.1 = 13$
$J\ (4\ ,1)$	4	1	$2.4 + 3.1 = 11$
$L\ (3,1)$	3	1	$2.3 + 3.1 = 9$
$K\ (4,2)$	4	2	$2.4 + 3.2 = 14$
$M\ (1,3)$	1	3	$2.1 + 3.3 = 11$
$N\ (1,0)$	1	0	$2.1 + 3.2 = 2$
$O\ (2,0)$	2	0	$2.2 + 3.0 = 4$
$P\ (3,0)$	3	0	$2.3 + 3.0 = 6$
$Q\ (4,0)$	4	0	$2.4 + 3.0 = 8$
$R\ (5,0)$	5	0	$2.5 + 3.0 = 10$
$S\ (6,0)$	6	0	$2.6 + 3.0 = 12$
$T\ (0,1)$	0	1	$2.0 + 3.1 = 3$
$U\ (0,2)$	0	2	$2.0 + 3.2 = 6$
$V\ (0,3)$	0	3	$2.0 + 3.3 = 9$
$W\ (1,1)$	1	1	$2.1 + 3.1 = 5$
$Y\ (2,2)$	2	2	$2.2 + 3.2 = 10$

Fonte: Elaborada pelos autores.

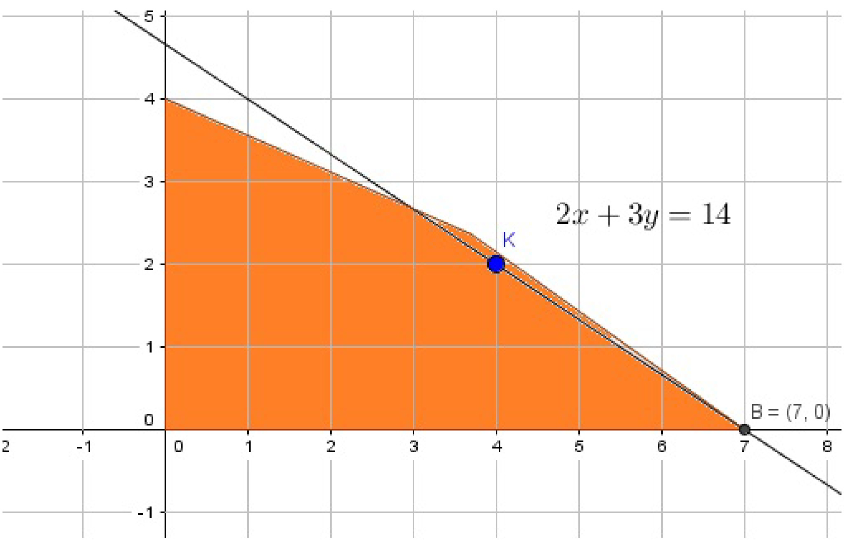
Percebemos que há dois pontos que nos fornecem um melhor lucro de 14,00 reais são os pontos *B* e *K* de coordenadas (*0,7*) e (*4,2*), respectivamente.

Graficamente, na Figura 11 visualizamos que a função objetivo $2x + 3y = 14$ passa pelos pontos *B* e *K*.

Portanto, se vendermos a combinação de 7 arranjos Graciosos e nenhum formoso ou a combinação de 4 graciosos e 2 formosos, obteremos mesmo lucro de 14,00 reais, sendo qual quer uma das duas combinações a melhor forma de obter o lucro máximo na venda.

Observamos que o ponto *K* é o mais próximo do vértice (o ponto *C* que vimos tem a solução ótima) dentre os pontos viáveis. Uma possibilidade de isto ocorrer é pela forma que obtemos a solução ótima utilizando o crescimento das curvas de nível.

Figura 11 – Pontos *B* e *K* estão contidos na reta de nível que possibilita lucro de reais.



Fonte: Oliveira (2016).

Conclusão

Este trabalho está concernente com a propostas dos parâmetros curriculares num incentivo a trabalhar com temas transversais no ensino médio e propõe contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da matemática no ensino médio, tomando como referência a programação linear e a programação linear inteira.

Tendo como ponto de partida questionamentos que, enquanto professor/educador, foram adquiridos a partir de aulas ministradas do componente curricular matemática no ensino médio, esta proposta didática apresenta subsídios metodológicos para professores e com aprofundamento de conteúdo novos no ensino.

Partindo do pressuposto que na Matemática o assunto otimização causa admiração e inquietação a muitos, pois há confrontos com situações em que deve-se tomar decisões de planejamento ou de gestão de forma a rentabilizar os recursos disponíveis e minimizar os custos, faz-nos afirmar que incentivar desde o ensino médio apresentar esta discussão ressalta a formação de cidadão dos alunos e provocando a tomar decisões que é uma condição da vida humana.

Observamos que problemas de programação linear e de problemas programação linear inteira atendem nosso objetivo, pois na resolução desses problemas por meio do método gráfico e porventura de algumas análises que fizemos no decorrer deste trabalho, pontuamos maneiras de provocar e aplicar diversos conteúdos explorados no ensino médio.

Dessa forma, com o uso da geometria analítica, entendo como parte da matemática que manipula de objetos matemáticos do campo da geometria e da álgebra, resolvemos tais problemas exploramos e reforçando a importâncias destes conceitos, além disso, fizemos isso com o auxílio do *software* GeoGebra o que acrescenta ao trabalho e potencializa a proposta didática.

Para utilizarmos esse *software*, focamos em problemas com duas variáveis, ou seja, sua representação tem duas dimensões, com isso foi possível fazer uma relação entre objetos algébricos e geométricos numa discussão sobre equações e inequações lineares.

De modo geral, pelo que apresentamos nas reflexões e nessas considerações finais, acreditamos ter, em alguma medida, chegado ao objetivo geral de nossa pesquisa em utilizar os modelos de programação linear e programação linear inteira na transversalidade e na modelagem matemática usando conceitos matemáticos trabalhados no ensino médio.

Para finalizar, sugerimos que outros estudos sejam desenvolvidos no âmbito dos problemas de programação linear e de programação linear inteira, focando a implementação do trabalho com projetos sob diferentes condições.

Referências

BRASIL. **Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.** Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

NETO, A. L. S. **Programação Linear e a Geometria Analítica.** 2014. 65 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Departamento de Matemática, Regional Catalão, 2014. Disponível em https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4024/2/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20-%20Andre%20Luis%20de%20Souza%20Neto%20-%202014.pdf. Acesso em: 18 abr. 2016.

OLIVEIRA, U. S. **Aplicando a programação linear e a programação linear inteira como suporte para temas transversais no ensino de matemática no ensino médio**. 2016. 57 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Cruz das Almas, 2016.

REHFELDT, M. J. H. **Aplicação de modelos matemáticos em situações-problemas empresariais, com uso do *software***

LINDO. 2009. 206 f. Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17255/000713767.pdf. Acesso em: 15 abr. 2016.

SODRÉ, U. **Modelos matemáticos**. 2007. Londrina-PR, 2007. Disponível em http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf. Acesso em: 03 de fevereiro de 2016.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional.** 8. ed. São Paulo: Pearson, 2007.

Sobre os autores

Adson Mota Rocha
Licenciado em Matemática (2001) – UEFS; Mestre em Matemática (2003) - UFPE; Doutor em Matemática Aplicada (2017) - UNICAMP. Atualmente, trabalha no Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC) da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), campus de Cruz das Almas, Bahia.
E-mail: adson@ufrb.edu.br

Ariston de Lima Cardoso
Doutor em Geociências (IGEO/UFBA), com Pós-doutorado pela Universidade Aberta de Portugal. Mestre em Física, Bacharel e Licenciado pela Universidade Federal da Bahia. Professor Adjunto na Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Tem experiência em gestão acadêmica e administrativa de cursos de graduação, tecnológico e pós-graduação, superintendência e coordenação de programas nacionais e institucionais. Em pesquisa atua na área interdisciplinar das Tecnologias Educacionais e Robóticas, além de projetos em desenvolvimento na área das Geotecnologias aplicadas a área Ambiental e Agricultura através de veículos aéreos não tripulados, sendo líder do grupo CNPq do grupo de Tecnologias Educacionais, Robótica e Física (G-TERF).
E-mail: ariston@ufrb.edu.br

Danilo de Jesus Ferreira
Doutor em Matemática pela UFSCar. Atualmente, trabalha no Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC) da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), campus de Cruz das Almas, Bahia.
E-mail: danilo.ferreira@ufrb.edu.br

Eleazar Gerardo Madriz Lozada
Possui graduação em Matemática pela Universidad Central de Venezuela (1982);;Mestrado em Ciências da Computação pela Universidad Simón Bolívar (1984), Doutorado em Matemática pela Universidad Central de Venezuela (1998); Pós-doutorado pela

Universidade Federal do Rio de Janeiro (2001); e Pós-doutorado pela Universidade Federal da Bahia (2018). Atualmente é Professor da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia.
E-mail: eleazar@ufrb.edu.br

Dilmara Mauricio do Carmo
Mestre em Matemática (Profmat/UFRB). Atualmente, trabalha na Secretaria de Educação da Bahia, com lotação no Colégio Estadual Deputado Manoel Novaes, em Salvador.
E-mail: dilmaracarmo@gmail.com

Erikson Alexandre Fonseca dos Santos
Mestre em Matemática (UFAL), Licenciado em Matemática (UFAL). Atualmente, trabalha na UFRB no Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC).
E-mail: eafsantos@ufrb.edu.br

Fabrícia da Conceição Lisboa
Licenciada em Matemática pela UEFS (2015) e Mestre em Matemática pelo Profmat/UFRB (2019). Atualmente, é professora do Colégio Estadual Adelaide Souza (Nilo Peçanha, Bahia).
E-mail: fabricia-lisboa@hotmail.com

Genilson Ribeiro de Melo
Doutor em Física pelo Instituto de Física Teórica da Unesp. Professor Associado da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, atuando em cursos de Graduação e Pós-Graduação. Líder do Grupo de Pesquisa Núcleo Interdisciplinar em Ciência, Engenharia e Tecnologia.
E-mail: gmelo@ufrb.edu.br

Janio Paim de Jesus
Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Recôncavo Baiano (Profmat). Especialista em Matemática com Ênfase em Informática na Educação e Licenciado em Ciências com Habilitação em Matemática pela UNEB – Campus II. Professor EBTT do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias Baiano e do Governo do Estado da Bahia. Tem experiência na área de Educação, com

interesse nos seguintes temas: Resolução de Problemas de Matemática e aplicação de Tecnologias no processo de ensino-aprendizagem. Atualmente coordena o Núcleo de Estudos Afro-brasileiros e Indígenas (NEABI) no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Baiano – IFBaiano/Campus Catu (Catu, Bahia).
E-mail: janio.jesus@ifbaiano.edu.br

João da Cruz Almeida
Mestre em Matemática (Profmat/UFRB); Licenciado em Matemática (UNEB). Atualmente, trabalha no Colégio Estadual São Felipe e Escola Municipal Presidente Médici, ambas localizadas em São Felipe, Bahia.
E-mail de contato: john-c-a@hotmail.com

Juarez dos Santos Azevedo
Doutor em Geofísica (UFBA), Mestre em Matemática (UFBA), Graduado em Matemática (UEFS). Atualmente, trabalha no Instituto de Ciência, Tecnologia e Inovação, Universidade Federal da Bahia – ICTI/UFBA (Camaçari, Bahia).
E-mail: jdazevedo@ufba.br

Julianna Pinele Santos Porto
Bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA, 2011); Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp, 2013); e Doutora em Matemática Aplicada pela Unicamp (2017). Desde 2017 é Professora Adjunto do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC) da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) e faz parte do corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) desde 2018. Tem experiência na área de Geometria da Informação.
E-mail: julianna.pinele@ufrb.edu.br

Katia Silene Ferreira Lima Rocha
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS, 2008); Mestre em Matemática, área de concentração Matemática Pura, pela Universidade Federal da Bahia (UFBA, 2011); e

Doutora em Matemática, área de concentração Sistemas Dinâmicos, pela UFBA (2015). Desde 2016 é Professora Adjunto do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC) da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) e faz parte do corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) desde 2016. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Sistemas Dinâmicos, atuando principalmente nos seguintes temas: medida física, partição, atrator, expansividade e hiperbolicidade parcial.
E-mail: katia.rocha@ufrb.edu.br

Leila Maria Salomão de Souza
Licenciada em Matemática – UEFS; Mestre em Matemática (2015) – Profmat/UFRB. Atualmente, trabalha no Colégio Estadual Antonio Joaquim Correia (Cachoeira, Bahia).
E-mail: leila.salomao@enova.educacao.ba.gov.br

Luciano de Souza Cerqueira
Licenciado em Matemática – UFBA (1993); Especialista em Educação, Ciência e Contemporaneidade – UEFS (2004); Especialista em Gestão Pública Municipal – UFBA (2015) e Mestre Profissional em Matemática – UFRB (2016). Atualmente, trabalha no Colégio Estadual Barros Barreto – Bairro: Paripe (Salvador, Bahia).
E-mail: profluciano64@uol.com.br

Osnildo Andrade Carvalho
Graduado em Matemática pela UEFS (Universidade Estadual de Feira de Santana-Ba). Especialista em Educação Matemática com novas tecnologias pela FTC (Faculdade de Tecnologia e Ciências). Mestre em Matemática UFRB-SBM (Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática). Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - IFBA/campus Feira de Santana (Feira de Santana, Bahia).
E-mail: osnildocarvalho@gmail.com

Patricia Barretto Santos Souza
Mestre em Matemática (Profmat/UFRB); Licenciada em Matemática

(UFSC). Atualmente, trabalha no Colégio Estadual Francisco da Conceição Menezes (Santo Antonio de Jesus, Bahia).
E-mail: patybarretto@gmail.com

Renato dos Santos Diniz
Licenciado em Matemática (2011) pela Universidade Estadual da Paraíba; Mestre em Matemática Pura: em Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica (2013); doutorando em Matemática Pura: Topologia Algébrica (especialista em Grupos de Tranças e Grupos cristalográficos) (desde 2016). Atualmente, trabalha no Centro de Formação de Professores, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - CFP/UFRB (Amargosa, Bahia).
E-mail: renatodiniz@ufrb.edu.br

Sânzia Alves do Nascimento
Bacharel em Física pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN, 2006); Mestre em Física pela UFRN (2008); e Doutora em Física pela UFRN (2012), com período de estágio doutoral no Observatório Astronômico da Universidade de Genebra, Suíça (2010–2011). Desde 2016 é Professora Adjunto do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC) da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) e faz parte do corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) desde 2018. Tem experiência na área de Astrofísica Estelar.
E-mail: salves@ufrb.edu.br

Tania Pinto dos Santos Souza
Mestre em Matemática (Profmat/UFRB); Especialista em Docência em Matemática pela Wpós; Especialista em Programação do Ensino pela ABEC; Licenciada em Matemática pela UNEB. Atualmente, trabalha no Centro Territorial de Educação Profissional do Litoral Norte e Agreste Baiano – CETEP/LNAB (Alagoinhas, Bahia).
E-mail: tpintosouza@yahoo.com.br

Uéric Silva Oliveira
Licenciado em Matemática (UFRB); Especialista em Ensino de Matemática (Universidade Candido Mendes); Mestre em Matemática

(UFRB). Atualmente, trabalha no Colégio Estadual João Pessoa (Itaquara, Bahia).
E-mail: ueric.s@hotmail.com

Wilson Teixeira Vieira Filho
Mestre em matemática – Profmat/UFRB. Atualmente, trabalha no Centro Estadual de Educação Profissional Formação e Eventos Isaías Alves (Salvador, Bahia).
E-mail: salsavieira2003@bol.com.br

Desde o início das atividades do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) no Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC) da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), que ocorreu em março de 2012, um total de 47 dissertações já foram defendidas, sobre as mais diversas temáticas do ensino - aprendizagem da Matemática. O presente livro está composto por onze capítulos fruto dos trabalhos que foram desenvolvidos como dissertações no âmbito desse programa ao longo de sua existência, trazendo proposições de sequências didáticas e experiências em sala de aula. Considerando-se o desenvolvimento de *softwares* e recursos tecnológicos, junto à popularização da internet e a inclusão digital nos processos educativos, o livro apresenta diversas possibilidades de práticas educativas a partir do uso desses recursos visando inspirar o professor de Matemática do Ensino Básico a desenvolver novas práticas em sala de aula. Os temas centrais envolvem Teoria dos Números, Geometria, Matemática Aplicada e Matemática Financeira, que são tratados em textos que trazem sugestões de metodologias para um melhor processo de ensino - aprendizagem, e apresentam conceitos formais necessários a um total entendimento dos conhecimentos matemáticos em torno de cada tópico.

ISBN: 978-65-87743-31-8

9 786587 743318

Editora UFRB